h) $4\cos^2 t - 2(1+\sqrt{2})\cos t + \sqrt{2} = 0$

i) $\cos^2 x - 4\sin x\cos x + 35\cos^2 x = 0$

j) $\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

k) $5\sin^2 x + 35\sin x\cos x - 4 = 0$

l) $2\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} + 5\sin x\cos x$

m) $2\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$

1) $2\sin^2(x) - \cos^2(x) = \frac{1}{2} + 5\sin(x)\cos(x)$

et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4\sin^2(x) - 2\cos^2(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x)) + 10\sin(x)\cdot\cos(x)$

$\Leftrightarrow 3\sin^2(x) - 3\cos^2(x) - 10\sin(x)\cdot\cos(x) = 0 \quad) : \cos^2(x)$

$\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0$ et $3\tan^2(x) - 3 - 10\tan(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0$ et $3\tan^2(x) - 10\tan(x) - 3 = 0$

et $\Delta' = 25 + 9 = 34 > 0$

et $\tan(x) = \dfrac{5 \pm \sqrt{34}}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) = \dfrac{5+\sqrt{34}}{3} \simeq \tan(1{,}30) \\ \text{ou} \\ \tan(x) = \dfrac{5-\sqrt{34}}{3} \simeq \tan(-0{,}27) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \{1{,}30 + k\pi \, ; \, -0{,}27 + k\pi\}$

m) $2\sin^4(x) - \sin^2(x)\cos^2(x) - 3\cos^4(x) = 0$

et $x \in \mathbb{R}$ et $\cos(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} - \dfrac{\sin^2(x)\cdot\cancel{\cos^2(x)}}{\cos^{\cancel{4}\,2}(x)} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\tan^4(x) - \tan^2(x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = \tan^2(x)$ et $2y^2 - y - 3 = 0$

et $(y+1)(2y-3) = 0$

$\Leftrightarrow y = \tan^2(x) = -1$ ou $y = \tan^2(x) = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$ ou $\tan(x) = +\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

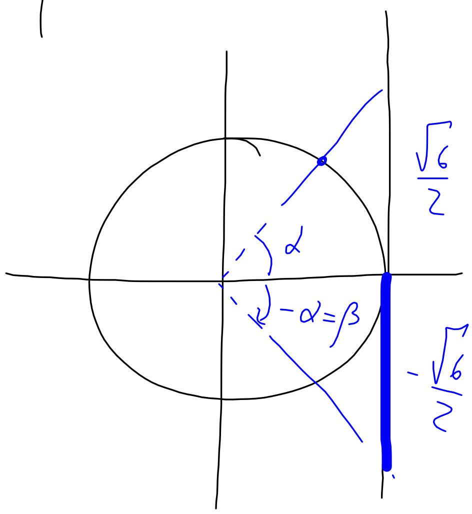
ou

$\tan(x) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \tan(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \tan(\alpha)$ ou $\tan(x) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} = \tan(\beta)$

et $\alpha \cong 0,89$ ou $\beta \cong -\alpha$

$\Leftrightarrow x \in \{\alpha + k\pi ; \beta + k\pi\}$



4) Résoudre les équations suivantes :

a) $2\cos x + 3\sin x = 1$

b) $3\cos x + 2\sin x = -3$

c) $2\cos x + 3\sin x = 3$

d) $\cos x + 2\sin x = 4$

b) $3\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha) = -3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $x = \cos(\alpha)$ et $y = \sin(\alpha)$
et $3x + 2y = -3$
et $x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{-3-3x}{2}$ et $x^2 + \left(\dfrac{+3x+3}{2}\right)^2 = 1$ et $x = \cos(\alpha)$, $y = \sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-5}{13} \text{ et } y = \frac{-12}{13} \end{cases}$$

et $x = \cos(\alpha)$ et $y = \sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = -1 \text{ et } \sin(\alpha) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(\alpha) = \frac{-5}{13} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{-12}{13} \end{cases}$$

cercle trigo :

$$x^2 + \left(\frac{3x+3}{2}\right)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 9x^2 + 18x + 9 = 4$

$\Leftrightarrow 13x^2 + 18x + 5 = 0$

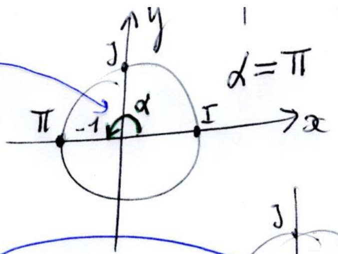
$(\Leftrightarrow \Delta' = 9^2 - 13 \cdot 5 = 16 = 4^2)$

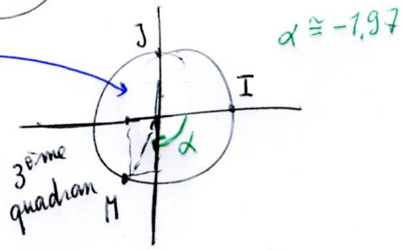
$\Leftrightarrow 13x^2 + 13x + 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 13x(x+1) + 5(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(13x+5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi + k2\pi \\ \text{ou} \\ \alpha \cong -1{,}97 + k2\pi \end{cases}$$





$$\Leftrightarrow \alpha \in \{\pi + k2\pi \,;\, -1{,}97 + k2\pi\}$$

* vérifier à la calculatrice :

$\cos(\alpha) = \frac{-5}{13} \cong \cos(1{,}97)$ $(\approx 112{,}62° < 180°)$

et $\sin(\alpha) = \frac{-12}{13} \cong \sin(-1{,}17)$ $(\approx -67{,}38°)$

$\Leftrightarrow$ $\alpha \cong 1{,}97 + k2\pi$ ou $\alpha \cong -1{,}97 + k2\pi$

et $\alpha \cong -1{,}17 + k2\pi$ ou $\alpha \cong \pi - (-1{,}17) + k2\pi \cong 4{,}32 + k2\pi \cong -1{,}97 + k2\pi$

b) $3\cos x + 2\sin x = -3$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \cos(x) + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sin(x) = \frac{-3}{\sqrt{13}} \quad \left(\in [-1;1]\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) \cdot \cos(x) + \sin(\alpha) \cdot \sin(x) = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos(\beta)$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \alpha \cong 0{,}59$$

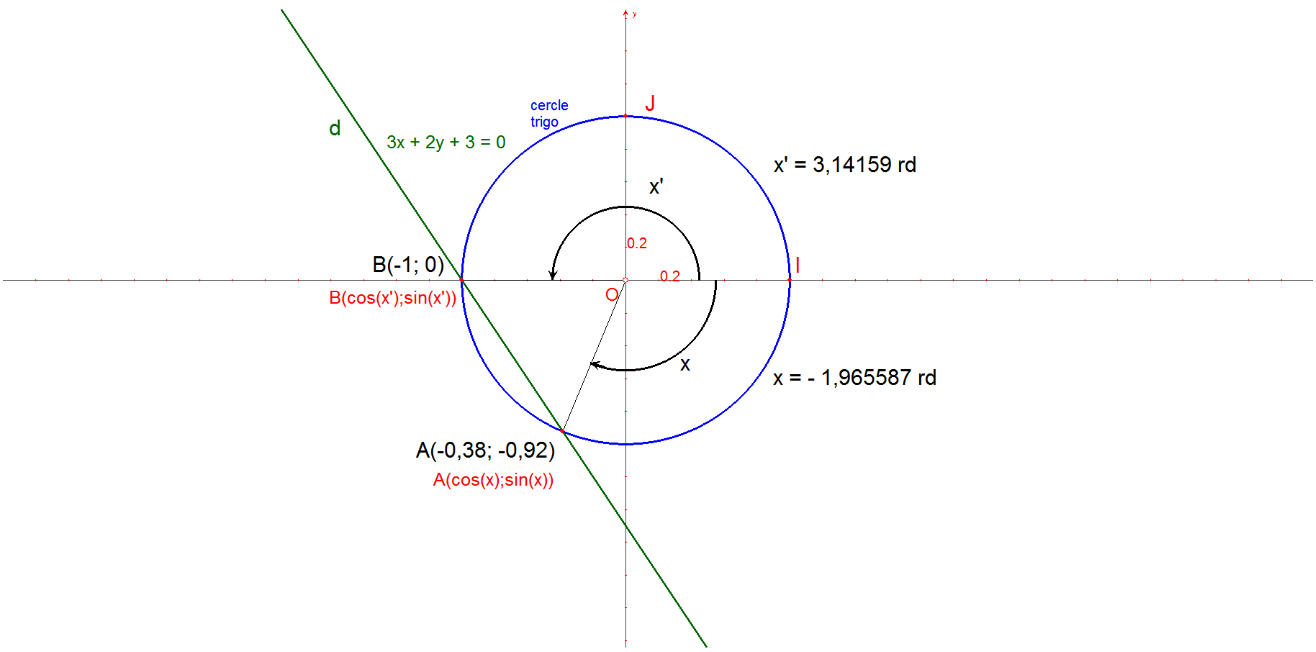
$$\cos(\beta) = \frac{-3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta \cong \pm 2{,}55$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \alpha = \beta + k2\pi \\ \text{ou} \\ x - \alpha = -\beta + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \overbrace{\alpha + \beta}^{\pi} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \alpha - \beta + k2\pi \end{cases}$$

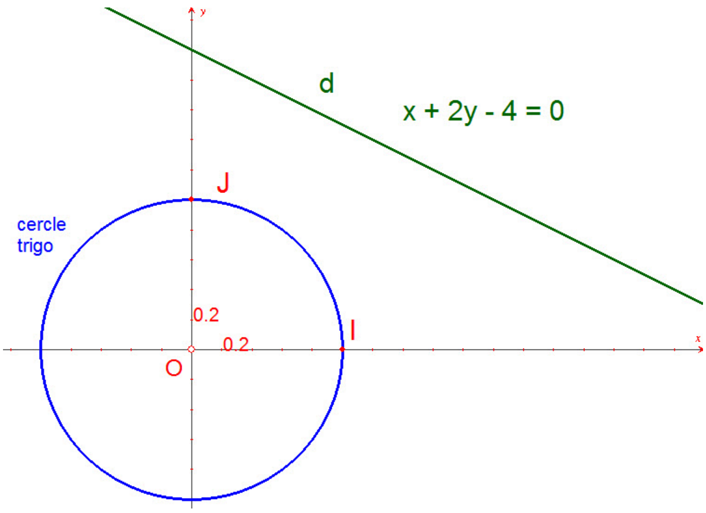
$$\Leftrightarrow x \in \{\pi + k2\pi \, ; -1{,}97 + k2\pi\}$$

script sur cette méthode


y
cercle
trigo
J
d
3x + 2y + 3 = 0
x' = 3,14159 rd
x'
0.2
B(-1; 0)
0.2
I
B(cos(x');sin(x'))
O
x
x = - 1,965587 rd
A(-0,38; -0,92)
A(cos(x);sin(x))

d) $1 \cdot \cos(\alpha) + 2\sin(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{5}} \; (>1)$

$\Leftrightarrow \alpha \in \emptyset$



cf. page 30 du Formulaires et Tables

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

cf. page 31 du Formulaires et Tables

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$
$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$
$\cos(3\alpha)=\cos(\alpha)\big(1-4\sin^2(\alpha)\big)=\cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-3\big)$
$\sin(3\alpha)=\sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-1\big)=\sin(\alpha)\big(3-4\sin^2(\alpha)\big)$
$\tan(3\alpha)=\dfrac{\tan(\alpha)\big(3-\tan^2(\alpha)\big)}{1-3\tan^2(\alpha)}$

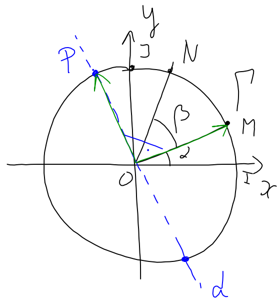
* § 4 Le théorème de Ptolémée

(H) $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$

(T) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

(D) Soit un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$



et $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha)) \in \mathcal{C}(O, 1)$

$N(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta)) \in \mathcal{C}(O, 1)$

où $\measuredangle \alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

$\measuredangle \beta = \measuredangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

Soit un nouveau repère R.O.N $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$

où $P \in \Gamma \cap d$ et $d \ni O$

$d \perp (OM)$

et ainsi $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$= P(-\sin(\alpha); \cos(\alpha))$

Alors :

$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha+\beta)\cdot\vec{i} + \sin(\alpha+\beta)\cdot\vec{j}$

et $\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha)\cdot\vec{i} + \sin(\alpha)\cdot\vec{j}$

$\overrightarrow{OP} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\vec{j}$

$= -\sin(\alpha)\cdot\vec{i} + \cos(\alpha)\cdot\vec{j}$

de plus :

$\overrightarrow{ON} = \cos(\beta)\cdot\underline{\overrightarrow{OM}} + \sin(\beta)\underline{\overrightarrow{OP}}$

U_2 $\Big($ $= \cos(\beta)\cdot\underline{(\cos(\alpha)\cdot\vec{i} + \sin(\alpha)\cdot\vec{j})} + \sin(\beta)\cdot\underline{(-\sin(\alpha)\cdot\vec{i} + \cos(\alpha)\cdot\vec{j})}$

$= \underline{(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta))}\cdot\vec{i} +$

$\underline{(\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta))}\cdot\vec{j}$

$= \underline{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\vec{i} + \underline{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\vec{j}$

Thm. $\Longrightarrow$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

et

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

CQFD

Pièces jointes

- cercle trigo-1.fig
- Histoire du degre.pdf
- radian.fig
- cercle trigo-3.fig
- cercle trigo-2.fig
- enroulement-horiz-trigo.fig
- enroulement-horiz-trigo-rad.fig
- cercle trigo-sin-cos.fig
- cercle trigo-tan-cot.fig
- fct-paire-impaire.fig
- cercle trigo-1fig.fig
- exe4a-corr.pdf
- trigo-equa-lineaires.pdf