a) $2\cos(x) + 3\sin(x) = 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos(x) = t$ et $\sin(x) = u$

et $2t + 3u = 1$ et $t^2 + u^2 = 1$ ($\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, vrai $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3u = 1 \\ t^2 + u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-3u}{2} \\ t^2+u^2 = 1 \end{cases}$$

coin brico :

$$\left(\frac{1-3u}{2}\right)^2 + u^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-3u)^2 + 4u^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9u^2 - 6u + 1 + 4u^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 13u^2 - 6u - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (-3)^2 + 13 \cdot 3 = 48$$

et $u = \frac{3 \pm \sqrt{48}}{13}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-3u}{2} \\ \left(\frac{1-3u}{2}\right)^2 + u^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-3u}{2} \\ u = \frac{3 \pm \sqrt{48}}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3+\sqrt{48}}{13} \\ \text{et} \\ t = \frac{1 - 3 \cdot \frac{3+\sqrt{48}}{13}}{2} = \frac{\frac{13-9-3\sqrt{48}}{13}}{2} = \frac{4-3\sqrt{48}}{2 \cdot 13} = \frac{4-3\cdot 4\sqrt{3}}{2 \cdot 13} \\ \qquad = \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} u = \frac{3-\sqrt{48}}{13} \\ \text{et} \\ t = \frac{1 - 3 \cdot \frac{3-\sqrt{48}}{13}}{2} = \frac{13-9+3\sqrt{48}}{2 \cdot 13} = \frac{4+3\sqrt{48}}{26} = \frac{2+6\sqrt{3}}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \text{ et } \sin(x) = \frac{3+\sqrt{48}}{13} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{2+6\sqrt{3}}{13} \text{ et } \sin(x) = \frac{3-\sqrt{48}}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{avec une calculatrice} \begin{cases} \cos(x) = \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \simeq \cos(2{,}27) \text{ et } \sin(x) = \frac{3+\sqrt{48}}{13} \simeq \sin(0{,}87) \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{2+6\sqrt{3}}{13} \simeq \cos(0{,}31) \text{ et } \sin(x) = \frac{3-\sqrt{48}}{13} \simeq \sin(-0{,}31) \end{cases}$$

?

⚠ attention à l'utilisation de la calculatrice :

si $a \in [-1;1]$ et $\cos(x) = a = \cos(\alpha)$, alors la calculatrice donne $\alpha \in [0;\pi]$

si $b \in [-1;1]$ et $\sin(x) = b = \sin(\beta)$, alors la calculatrice donne $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$

Donc si on doit résoudre :

$\cos(x) = a$ et $\sin(x) = b$ (avec $a^2+b^2=1$)

$\Leftrightarrow \cos(x) = a = \cos(\alpha)$ et $\sin(x) = b = \sin(\beta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}$ et $\begin{matrix} x = \beta + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \beta + k2\pi \end{matrix}$

$\Leftrightarrow x \in \{\ ?\ \}$ comment calculer l'ensemble solution ?

Proposition : travailler sur un cercle trigo :

* si $\cos(x) = \dfrac{2-6\sqrt{3}}{13} < 0$ et $\sin(x) = \dfrac{3+\sqrt{48}}{13} > 0$, alors M est dans le 2^e quadran avec l'angle $\measuredangle x = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

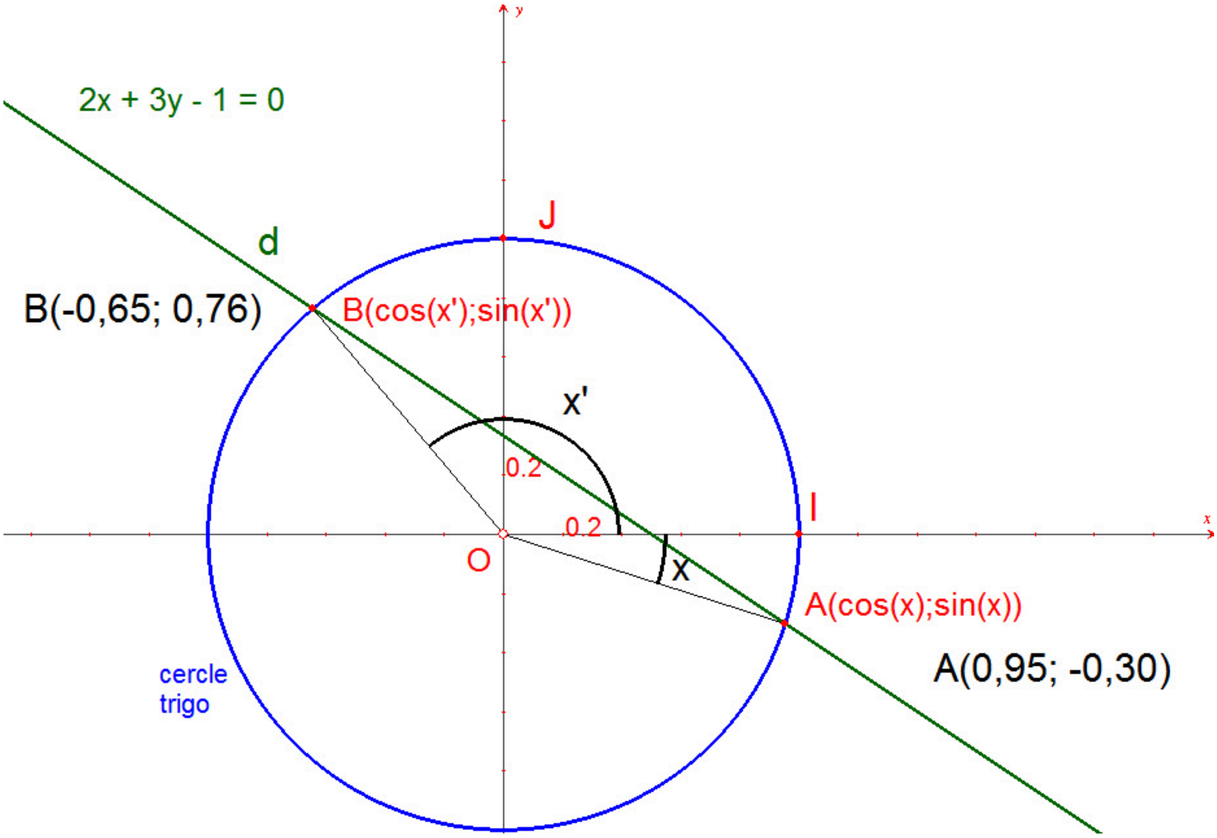
d'où $x \cong 2{,}27 + k2\pi$

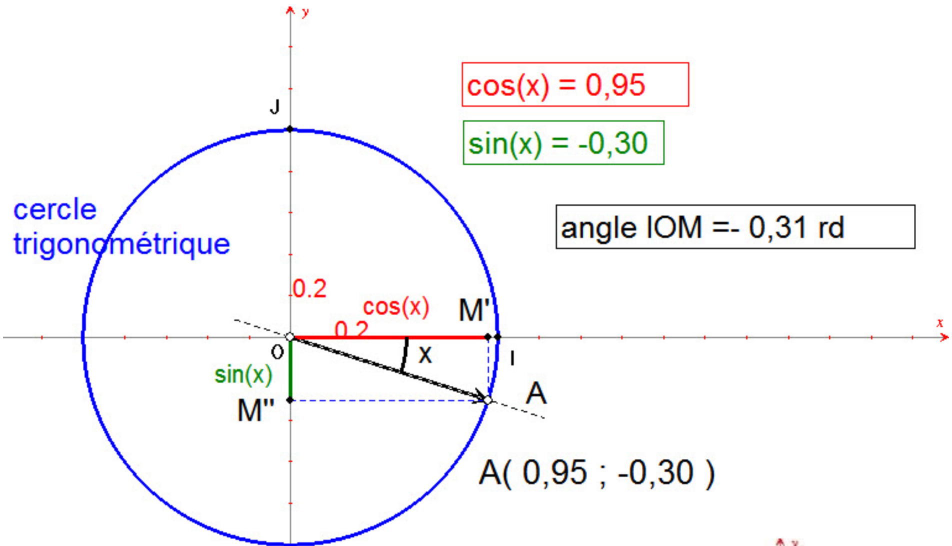
* si $\cos(x) = \dfrac{2+6\sqrt{3}}{13} > 0$ et $\sin(x) = \dfrac{3-\sqrt{48}}{13} < 0$, alors M est dans le 4^e quadran

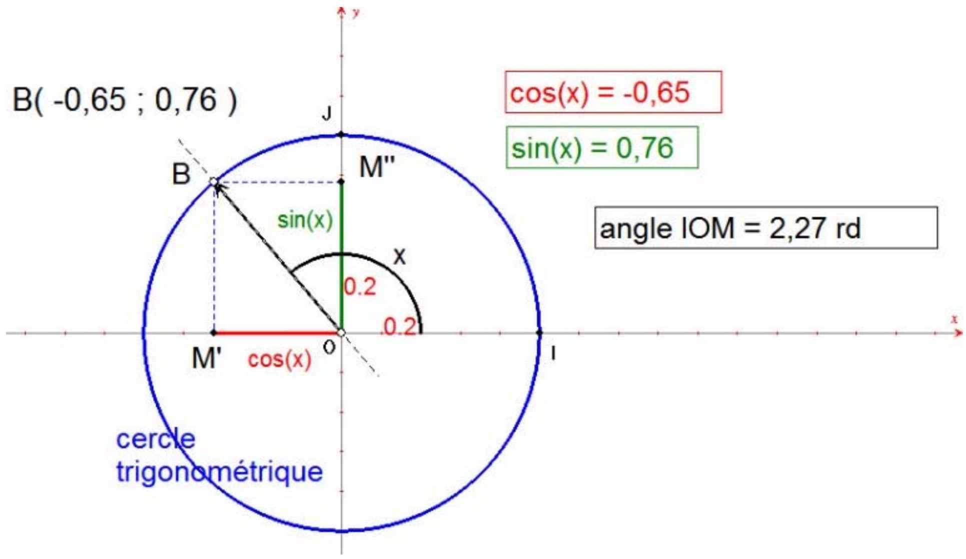
d'où $x \cong -0{,}31 + k2\pi$

Réponse finale : $x \in \{2{,}27 + k2\pi\ ;\ -0{,}31 + k2\pi\}$

$\downarrow$ point B $\downarrow$ point A


2x + 3y - 1 = 0
d
J
B(-0,65; 0,76)
B(cos(x');sin(x'))
x'
0.2
0.2
I
O
x
A(cos(x);sin(x))
A(0,95; -0,30)
cercle
trigo


J
cos(x) = 0,95
sin(x) = -0,30
angle IOM =- 0,31 rd
cercle
trigonométrique
0.2
cos(x)
M'
0.2
O
x
I
sin(x)
A
M''
A(0,95 ; -0,30)


B(-0,65 ; 0,76)
J
cos(x) = -0,65
sin(x) = 0,76
B
M''
sin(x)
angle IOM = 2,27 rd
x
0.2
0.2
M'
cos(x)
O
I
cercle
trigonométrique