7) Une personne aperçoit de l'autre côté d'un canal un arbre vertical, juste en face, sous un angle de 35°.
Il se déplace de 30 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de 19°.
Calculer la largeur du canal et de la hauteur de l'arbre.

7) Données : * largeur du canal :

$AB = x$

* déplacement :

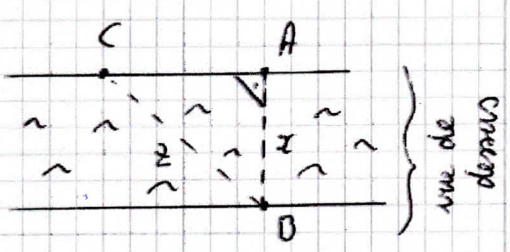
$AC = 30\ [m]$

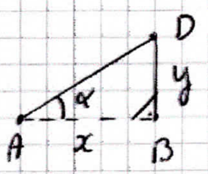
* hauteur - arbre :

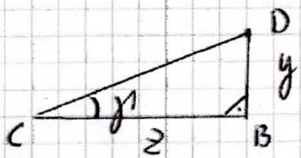
$BD = y$

* $\alpha = 35°$ et $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle BAD$

* $\beta = 19°$ et $\sphericalangle\beta = \sphericalangle BCD$







* Résolution :

* dans le triangle ΔABD, rectangle en B : $\tan(\alpha) = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{y}{x}$

* dans le triangle ΔCBD, rectangle en B : $\tan(\beta) = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{y}{z}$.

* dans le triangle ΔABC, rectangle en A : Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$\Leftrightarrow \quad z^2 = x^2 + 900$$

On a : $\begin{cases} \tan(\alpha) = \dfrac{y}{x} \\ \tan(\beta) = \dfrac{y}{z} \\ z^2 = x^2 + 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \cdot \tan(\alpha) & (1) \\ z = \dfrac{y}{\tan(\beta)} = \dfrac{x \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta)} \\ x^2 = z^2 - 900 = \left(\dfrac{x \tan(\alpha)}{\tan(\beta)}\right)^2 - 900 & (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow (3) \quad x^2 = x^2 \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\beta)} - 900 \quad \Leftrightarrow \quad 900 = x^2 \left(\frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\beta)} - 1\right)$$

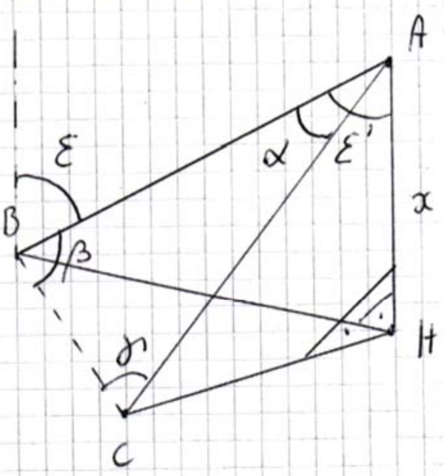
$$\Leftrightarrow \quad 900 = x^2 \, \frac{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}{\tan^2(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 900 \cdot \frac{\tan^2(\beta)}{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{+\ 30 \cdot \tan(\beta)}{\sqrt{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}} \quad \text{et de } (1) \quad y = \frac{30 \cdot \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\sqrt{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}}$$

$$\text{a.n. : } \quad x = \frac{\tan(19°) \cdot 30}{\sqrt{\tan^2(35°) - \tan^2(19°)}} \cong 16{,}94\ [m] \quad \text{et} \quad y \cong 11{,}86\ [m]$$

8) On demande de calculer la hauteur AH (A le sommet, H le pied de la montagne) d'une montagne par rapport à une plaine.
Soient B et C deux points accessibles dans cette plaine distants de 250 mètres.
Soient les angles $\sphericalangle\beta = \sphericalangle ABC$ et $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle ACB$ avec $\beta = 79{,}6°$ et $\gamma = 87{,}4°$.
En B le rayon visuel [B,A] fait avec la verticale du lieu un angle de 23,25°.
a) faire une figure d'étude ;
b) calculer x = AH.

8) Données :



* hauteur - montagne : $x = AH$
* distance $BC = 250$ [m]
* $\sphericalangle\beta = \sphericalangle ABC$: $\beta = 79{,}6°$
* $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle ACB$: $\gamma = 87{,}4°$
* angle en B avec la verticale : $\varepsilon = 23{,}25°$

Résolution :

* dans le triangle Δ AHB, rectangle en H : $\cos(\varepsilon') = \dfrac{AH}{AB}$

où $\sphericalangle\varepsilon' = \sphericalangle HAB$ et $\varepsilon' = \varepsilon$ (angles alternes - internes)

donc $x = AH = AB \cdot \cos(\varepsilon')$

* dans le triangle Δ ABC on a $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle CAB$

et $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta - \gamma = 13°$

calcul de AB : thm du sinus : $\dfrac{AB}{\sin(\gamma)} = \dfrac{BC}{\sin(\alpha)}$

$\Leftrightarrow AB = BC \cdot \dfrac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$

* Finalement : $AH = x = BC \cdot \dfrac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \cdot \cos(\varepsilon)$

- a.n. : $x = 250 \cdot \dfrac{\sin(87{,}4°)}{\sin(13°)} \cdot \cos(23{,}25°) \simeq 1020{,}05$ [m]