Exercices – équations trigonométriques

Les formulaires et tables sont autorisées.
La calculatrice est autorisée, mais seulement pour les applications numériques en valeurs approchées.

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
(donner le domaine de chaque équation)

a) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

b) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{x}{4} + \frac{2\pi}{3}) = 0$

c) $\cos(x) + \sin(x) = -1$

d) $1 + \cos(x) = \cos(2x)$

e) $\tan(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0$

f) $2\sin(x) + 3\cos(x) = 4$

a) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$ et $x \in \mathbb{R}$

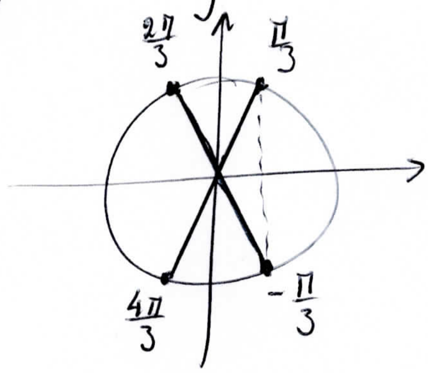
$\Leftrightarrow \sin(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi ; \frac{2\pi}{3} + k2\pi ; \frac{-\pi}{3} + k2\pi ; \frac{4\pi}{3} + k2\pi \right\}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi ; \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$



b) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad -\cos(\alpha) = \cos(\pi + \alpha)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{x}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{x}{4} + \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\left(\frac{x}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = 2\pi + k2\pi = k'2\pi \ (k' = k+1) \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{4} = \frac{-4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k'8\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{-16\pi}{9} + k\frac{8\pi}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ k8\pi ; \frac{-16\pi}{9} + k\frac{8\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\cos(x) + \sin(x) = -1$ et $x \in \mathbb{R}$ $\Big) : \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) = \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{2}}}_{\in[-1;1]}$

$\Big) \ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

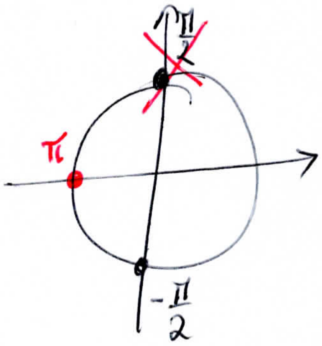
$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \cancel{\frac{\pi}{2}}\,\pi + k2\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \cancel{\frac{\pi}{2}}\,\pi + k2\pi \,;\, -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$



d) $1 + \cos(x) = \cos(2x)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\Leftrightarrow 1 + \cos(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$

$\Leftrightarrow 1 + \cos(x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.2.(-2) = 17$ et $\cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \ (\notin [-1,1])$ ou $\cos(x) = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \cong \cos(2,47)$

$\Leftrightarrow \quad x \in \emptyset$ ou $x \cong \pm 2,47 + k2\pi$

$\Leftrightarrow x \in \{2,47 + k2\pi\}$

e) $\tan(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} - (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0$ $\Big) \times \cos(2x) \neq 0$ | car $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2x) - \cos(2x).\cos(2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(2x) - (1 - \sin^2(2x)) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.(-1) = 5$ et $\sin(2x) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \ (\notin [-1;1])$ ou $\sin(2x) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cong \sin(0,67)$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \cancel{0,67 + k2\pi}\ 0,33 + k\pi \,;\, \cancel{2,47 + k2\pi}\ 1,24 + k\pi \right\}$

f) $2\sin(x) + 3\cos(x) = 4$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(x) + \frac{3}{\sqrt{13}}\cos(x) = \underbrace{\frac{4}{\sqrt{13}}}_{\notin[-1;1]}$ $\quad : \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

or $\frac{4}{\sqrt{13}} > 1 \Leftrightarrow 4 > \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow 16 > 13$ (vrai)

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$