

cf. page 31 du Formulaires et Tables

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)(1 - 4\sin^2(\alpha)) = \cos(\alpha)(4\cos^2(\alpha) - 3)$$

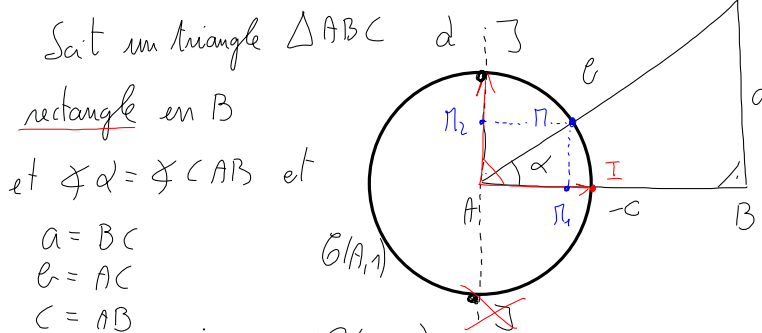
$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)(4\cos^2(\alpha) - 1) = \sin(\alpha)(3 - 4\sin^2(\alpha))$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{\tan(\alpha)(3 - \tan^2(\alpha))}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) \\&= \sin(2\alpha) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \sin(\alpha) \\&= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) \\&= \sin(\alpha) \cdot (2 \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \\&= \sin(\alpha) (3 \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))) \\&= \sin(\alpha) \cdot (4 \cos^2(\alpha) - 1) \\&= \sin(\alpha) \cdot (4(1 - \sin^2(\alpha)) - 1) \\&= \sin(\alpha) \cdot (3 - 4 \sin^2(\alpha))\end{aligned}$$

5 Trigonométrie et triangle

1 Triangle rectangle



On construit le cercle $G(A, 1)$ et $AB = c > 1$

et $I \in G(A, 1) \cap [A, B]$ et $J \in d \cap G(A, 1)$

avec $\mathcal{B} = (A, \overline{AI}, \overline{AJ})$ et $d \perp (AB)$ et $d \ni A$
 est direct et orthornormé

Soit $\Pi \in G(A, 1) \cap [A, C]$ et $\Pi_1 = p_{\perp}(\Pi) \in (AI)$
 $\Pi_2 = p_{\perp}(\Pi) \in (AJ)$

Par Thalès (direct): (ou avec le thm 23 :
 On a : $(\Pi\Pi_1) \parallel (BC)$ $\triangle ABC \sim \triangle AP_1\Pi$ car 3 angles égaux

$$\stackrel{(ccc)}{\implies} \frac{AB}{AP_1} = \frac{BC}{\Pi\Pi_1} = \frac{AC}{AP_1\Pi} \quad \left(\frac{\triangle ABC}{\triangle AP_1\Pi} \right)$$

$$\text{or } AP_1 = \overline{AP_1} = \cos(\alpha) \text{ et } AP_1\Pi = 1$$

$$\Pi\Pi_1 = \overline{AP_1\Pi} = \sin(\alpha)$$

$$\text{d'où } \frac{AB}{AP_1} = \frac{AC}{1} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = AP_1 = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{et } \frac{BC}{\Pi\Pi_1} = \frac{AC}{1} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \Pi\Pi_1 = \frac{BC}{AC}$$

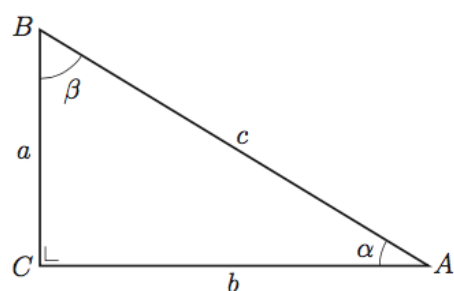
$$\text{et } \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AB}$$

D'où les formules :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} & (\text{cos adj hyp}) \\ \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} & (\text{sin op hyp}) \\ \tan(\alpha) = \frac{BC}{AB} & (\text{tan op adj}) \end{cases}$$

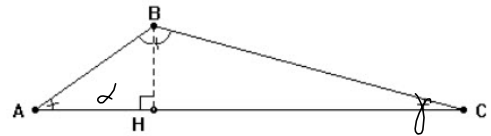
cf. page 32 du Formulaires et Tables

Triangle rectangle



$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \tan(\beta)$

- 1) Soit un triangle $\triangle ABC$ et $H = p_{\perp}(B) \in (AC)$ et $H \in [A, C]$.
 On donne $\delta(A, H) = AH = 7$, $\alpha = 35^\circ$ et $\gamma = 18^\circ$.
 Calculer $c = AB$, $h = BH$, $b = AC$, $a = BC$ et β .



* Données:

$$\left\{ \begin{array}{l} * A \notin (BC) \\ * H = p_{\perp}(B) \in [A, C] \\ * AH = 7, \alpha = 35^\circ, \gamma = 18^\circ \\ * \text{calculer } c = AB, h = BH, b = AC \\ \quad a = BC \text{ et } \beta \end{array} \right.$$

* Résolution:

1) calculer β : On a : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$
application numérique : $\beta = 180^\circ - 35^\circ - 18^\circ$
 $\Leftrightarrow \beta = 127^\circ$

2) Calcul de $c = AB$:

dans le triangle $\triangle ABH$ rectangle en H :

On a : $\cos(\alpha) = \frac{AH}{AB}$ (et $\sin(\alpha) = \frac{BH}{AB}$)

(et $\tan(\alpha) = \frac{BH}{AH}$)

d'où $\cos(\alpha) = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AH}{\cos(\alpha)}$

applic. num. : $AB = \frac{7}{\cos(35^\circ)}$
 $\approx 8,55$

3) calcul de $h = BH$:

dans le triangle AHB , rectangle en H ,

$$\text{on a } \sin(\alpha) = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{c} \quad \text{ou} \quad \tan(\alpha) = \frac{BH}{AH} = \frac{h}{AH}$$

$$\Leftrightarrow h = \tan(\alpha) \cdot AH$$

application numérique: $h = \tan(\alpha) \cdot AH = \tan(35^\circ) \cdot 7$
 $\approx 4,9$ (unités de longueur)

4) calcul de $b = AC$ et $a = BC$:

On a $b = AC = AH + HC$ car $H \in [A, C]$ et axiome de la distance
où $AH = 7$ et $HC = x$ à calculer :

dans le triangle BHC , rectangle en H :

$$\text{on a : } \sin(\beta) = \frac{BH}{BC} \text{ et } \cos(\beta) = \frac{HC}{BC} \text{ et } \tan(\beta) = \frac{BH}{HC}$$

où HC et BC inconnues, $BH = h = \tan(\alpha) \cdot AH$

$$\text{d'où } BC = \frac{BH}{\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha) \cdot AH}{\sin(\beta)} ; \text{ app. num. : } BC = \frac{\tan(35^\circ) \cdot 7}{\sin(18^\circ)}$$

$$\text{et } HC = \frac{BH}{\tan(\beta)} = \frac{\tan(\alpha) \cdot AH}{\tan(\beta)} ; \text{ app. num. : } HC = \frac{\tan(35^\circ) \cdot 7}{\tan(18^\circ)}$$

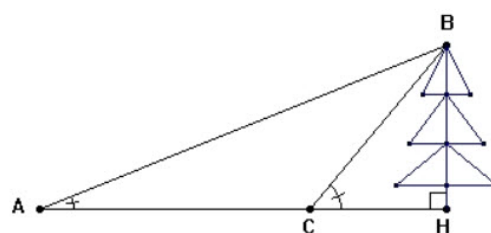
$$\approx 15,86$$

$$\approx 15,09$$

Réponse: *

- * $\beta = 127^\circ$
- * $c = AB \cong 8,55$ (unités de longueur : u.l.)
- * $h = BH \cong 4,9$ (u.l.)
- * $b = AC = AH + HC \cong 19,99$ (u.l.)
- * $a = BC \cong 15,86$ (u.l.)

- 2) Un arbre d'une hauteur inconnue $x = BH$ est observé par une personne située en C à trois mètres ($CH = 3$) du pied de l'arbre sous un angle de 50° ($\gamma = 50^\circ$). Cette personne recule de 8 mètres ($AC = 8$).
- Calculer la hauteur x de l'arbre.
 - Calculer la mesure α de l'angle sous lequel l'observateur voit l'arbre en A.



- 3) Un arbre donne une ombre sur le sol quand les rayons du soleil font un angle de 55° avec le sol. Au même instant, à 8 mètres de l'arbre, un piquet vertical de 3 mètres de hauteur est planté en terre .
- Faire une figure d'étude.
 - Calculer l'ombre du piquet.
 - Calculer la hauteur de l'arbre.
- 4) On donne un triangle $\triangle ABC$ et $B' = p_\perp(B) \in (AC)$ le pied de la hauteur issue du point B. si $\alpha = 25^\circ$, $h = BB' = 4$ et $b = AC = 13$, calculer $x = AB'$ et $\beta = \mu_d(\sphericalangle CBB')$. (faire une figure d'étude)
- 5) Une tour circulaire de 20 mètres de diamètre est vue sous un angle horizontal de $\alpha = 18^\circ$. A quelle distance du point le plus proche de la tour se trouve-t-on ?
- 6) Quelle est la hauteur d'une tour qui donne 36 mètres d'ombre lorsque le soleil est élevé de $37,5^\circ$ dessus de l'horizon dans l'après-midi. Au même moment un homme de 2,15m passe près de la tour, quelle est son ombre ? Une heure plus tard l'ombre de la tour est de 42 mètres, quelle est l'inclinaison du soleil ?

- 7) Une personne aperçoit de l'autre côté d'un canal un arbre vertical, juste en face, sous un angle de 35° .
Il se déplace de 30 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de 19° .
Calculer la largeur du canal et de la hauteur de l'arbre.
- 8) On demande de calculer la hauteur AH (A le sommet, H le pied de la montagne) d'une montagne par rapport à une plaine.
Soient B et C deux points accessibles dans cette plaine distants de 250 mètres.
Soient les angles $\sphericalangle\beta = \sphericalangle ABC$ et $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle ACB$ avec $\beta = 79,6^\circ$ et $\gamma = 87,4^\circ$.
En B le rayon visuel [B,A] fait avec la verticale du lieu un angle de $23,25^\circ$.
- faire une figure d'étude ;
 - calculer $x = AH$.