Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

10 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ (un **théorème d'échange**)

Ce théorème est immédiat pour $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.

Dans les autres cas, avec $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$, on utilise $\mathcal{S}_d(I) = J$ et $\mathcal{S}_d(M) = M_1$.
Alors, $\mathcal{S}_d([O,I)) = [O,J)$ et $\mathcal{S}_d([IOM]) = [JOM_1]$ et $([JOM_1], [O,J))$ n'est pas de même orientation que $([IOM], [O,I))$ car on a un nombre impair de symétries orthogonales qui transforment un secteur en l'autre et $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM_1})) = -\dot{x}$.

On a ainsi $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})) = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})) + m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM_1}))$

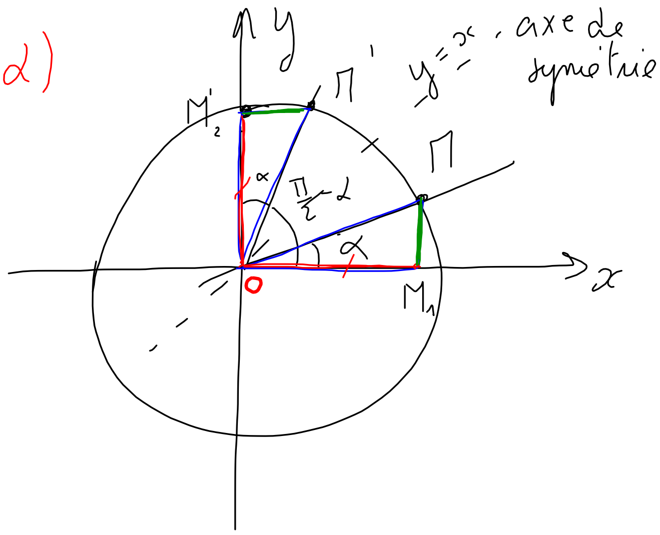
$$= \dot{\frac{\pi}{2}} - \dot{x} = (\dot{\frac{\pi}{2} - x})$$

Si l'on pose $p_\perp(M) = M' \in (OI)$ et $p_\perp(M_1) = M'' \in (OJ)$,
alors $\mathcal{S}_d(M'') = \mathcal{S}_d(p_\perp(M_1) \in (OJ)) = p_\perp(M) \in (OI) = M'$ et $\overline{OM''} = \overline{OM'}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

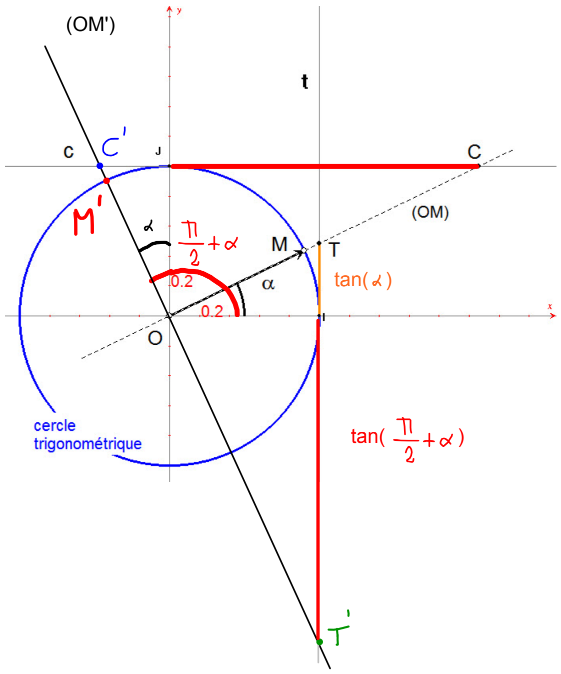
$*$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$



$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot(\alpha)$$

et $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan(\alpha)$



20 *Calculer* $\cos(-\frac{\pi}{3})$ $\sin\frac{3\pi}{2}$ $\cos\frac{5\pi}{2}$ $\sin\frac{5\pi}{4}$ $\cos\frac{7\pi}{6}$

$\sin(36\pi + \frac{\pi}{3})$ $\cos(-12\pi + \frac{\pi}{6})$ $\sin(3\pi + \frac{\pi}{3})$ $\cos(5\pi - \frac{\pi}{3})$ $\cos(x + \frac{3\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{5\pi}{2})$ $\sin\frac{145\pi}{6}$ $\sin\frac{218\pi}{3}$ $\cos(-\frac{15\pi}{4})$ $\sin\frac{73\pi}{6}$

23 *Exprimer en fonction de* $\cos x$ *ou de* $\sin x$.

$\sin(x - 3\pi)$ $\cos(5\pi + x)$ $\cos(4\pi - x)$ $\cos(\frac{5\pi}{2} - x)$ $\sin(\frac{7\pi}{2} - x)$ $\cos(\frac{7\pi}{2} - x)$

29 *a)* *Sans calculer* x, *trouver* $\sin x$ *et* $\cos x$ *si* $\tan x = \frac{3}{2}$ *et* $2\sin x + 3\cos x = 2$.

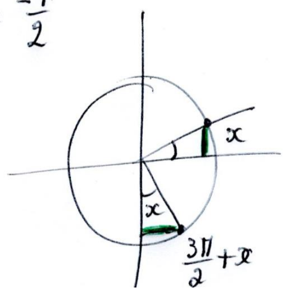
b) *Sans calculer* x, *trouver* $\sin x$ *et* $\cos x$ *si* $\tan x = \frac{3}{4}$.

20 *Calculer*

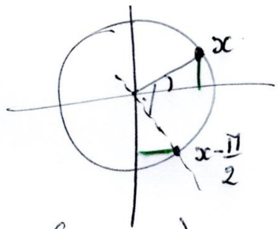
$\cos(-\frac{\pi}{3})$	$\sin\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{5\pi}{2}$	$\sin\frac{5\pi}{4}$	$\cos\frac{7\pi}{6}$
$\sin(36\pi+\frac{\pi}{3})$	$\cos(-12\pi+\frac{\pi}{6})$	$\sin(3\pi+\frac{\pi}{3})$	$\cos(5\pi-\frac{\pi}{3})$	$\cos(x+\frac{3\pi}{2})$
$\cos(x-\frac{5\pi}{2})$	$\sin\frac{145\pi}{6}$	$\sin\frac{218\pi}{3}$	$\cos(-\frac{15\pi}{4})$	$\sin\frac{73\pi}{6}$

* $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (car "cos" est paire)
  $= \frac{1}{2}$ (cf Tableau)
* $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ (cf Tableau)
* $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ("cos" est pér. de 2π)
  $= 0$
* $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (cf tableau)

* $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cf tableau)
* $\sin\left(36\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\cos\left(-12\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
* $\cos\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$
* $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(x)$



$$* \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$



$$* \sin\left(145\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{144\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(24\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$* \sin\left(\frac{218\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{216\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(72\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \sin\left(\frac{73\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{72\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

(23) *Exprimer en fonction de cos x ou de sin x .*

$\sin(x - 3\pi)$ $\cos(5\pi + x)$ $\cos(4\pi - x)$ $\cos(\frac{5\pi}{2} - x)$ $\sin(\frac{7\pi}{2} - x)$ $\cos(\frac{7\pi}{2} - x)$

* $\sin(x-3\pi) = \sin(x-\pi-2\pi) = \sin(x-\pi) = -\sin(\pi-x) \overset{*}{=} -\sin(x)$
* $\cos(5\pi+x) = \cos(4\pi+\pi+x) = \cos(\pi+x) \overset{*}{=} -\cos(x)$
* $\cos(4\pi-x) = \cos(-x) = \cos(x)$ (car "cos" est paire)
* $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \overset{*}{=} \sin(x)$
* $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \overset{*}{=} -\cos(x)$

car "sin" est impaire

* $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$) car "cos" est paire

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$\overset{*}{=} -\sin(x)$

* cf Tableau du début de ce cours (cf Form. et Tables)

29 a) *Sans calculer* $\mathbf{x}$, *trouver* $\sin \mathbf{x}$ *et* $\cos \mathbf{x}$ *si* $\tan \mathbf{x} = \frac{3}{2}$ *et* $2\sin \mathbf{x} + 3\cos \mathbf{x} = 2$.

b) *Sans calculer* $\mathbf{x}$, *trouver* $\sin \mathbf{x}$ *et* $\cos \mathbf{x}$ *si* $\tan \mathbf{x} = \frac{3}{4}$.

exercice 29

a) Calculer $\sin(x)$ et $\cos(x)$, si $\tan(x) = \frac{3}{2}$ et $2\sin(x) + 3\cos(x) = 2$

(sans calculer x)

* Posons $\sin(x) = t$ et $\cos(x) = u$

alors $\tan(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{t}{u} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t - 3u = 0$

et $2\sin(x) + 3\cos(x) = 2 \Leftrightarrow 2t + 3u =$

à résoudre : $\begin{cases} 2t - 3u = 0 \\ 2t + 3u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 2 \text{ et } t = \frac{1}{2} \\ 6u = 2 \text{ et } u = \frac{1}{3} \end{cases}$

Réponse : $t = \sin(x) = \frac{1}{2}$ et $u = \cos(x) = \frac{1}{3}$

b) Sans calculer x, calculer $\sin(x)$ et $\cos(x)$ si $\tan(x) = \frac{3}{4}$

* Posons $\sin(x) = t$ et $\cos(x) = u$ d'où $\tan(x) = \frac{t}{u} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 4t - 3u = 0$ ... mais il nous manque une équation !

Or $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t^2 + u^2 = 1$

à résoudre : $\begin{cases} 4t - 3u = 0 \\ t^2 + u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4}u \\ \left(\frac{3}{4}u\right)^2 + u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm\frac{3}{5} \\ u = \pm\frac{4}{5} \end{cases}$

réponse : $\sin(x) = t = \frac{3}{5}$ et $\cos(x) = u = \frac{4}{5}$

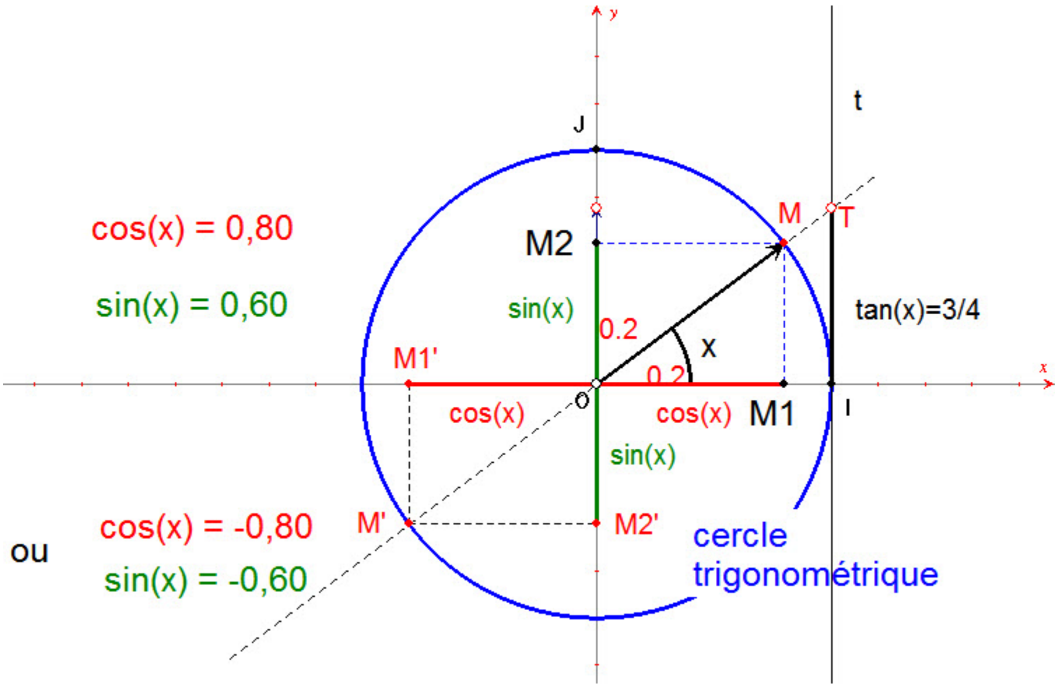
ou $\sin(x) = \frac{-3}{5}$ et $\cos(x) = \frac{-4}{5}$

coin brico : $\left(\frac{3}{4}u\right)^2 + u^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{16}u^2 + \frac{16}{16}u^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{25}{16}u^2 = 1 \Leftrightarrow u^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow u = \pm\frac{4}{5}$

d'où $t = \frac{3}{4}u = \pm\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \pm\frac{3}{5}$


y
t
J
cos(x) = 0,80
M
T
M2
sin(x) = 0,60
sin(x)
tan(x)=3/4
0.2
x
M1'
0.2
x
O
cos(x)
cos(x)
M1
I
sin(x)
cos(x) = -0,80
M'
M2'
cercle
trigonométrique
ou
sin(x) = -0,60

§ 3 Les équations trigonométriques

1) Soit $a \in \mathbb{R}$: $\tan(x) = a$ — avec le tableau ou avec la calculatrice

$\Leftrightarrow \tan(x) = \tan(\alpha)$

$\Leftrightarrow x \in \{\alpha + k\pi\}$

et $\cot(x) = a$ — idem

$\Leftrightarrow \cot(x) = \cot(\beta)$

$\Leftrightarrow x \in \{\beta + k\pi\}$

2) Soit $a \in [-1;1]$ et $\cos(x) = a$ — avec le tableau ou la calculatrice

$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\alpha + k2\pi \,;\, -\alpha + k2\pi\}$$

3) Soit $a \in [-1;1]$: $\sin(x) = a$ — avec le tableau ou avec la calculatrice

$x = \pi - \alpha$

$\Leftrightarrow x + \alpha = \pi$

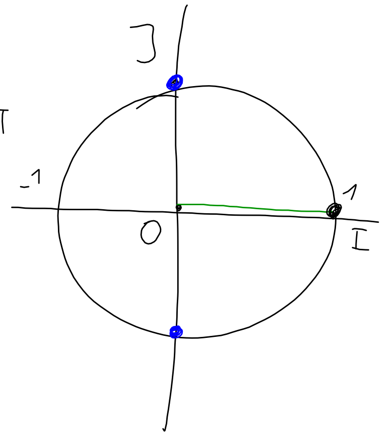
$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi - \alpha)\ k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\alpha + k\cdot 2\pi \,;\, (\pi-\alpha) + k\cdot 2\pi\}$$

1) $\cos(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

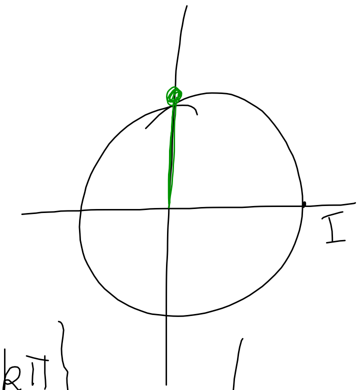
$\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$



2) $\cos(x) = 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$\iff x = 0 + k2\pi$

$\iff x \in \left\{ k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

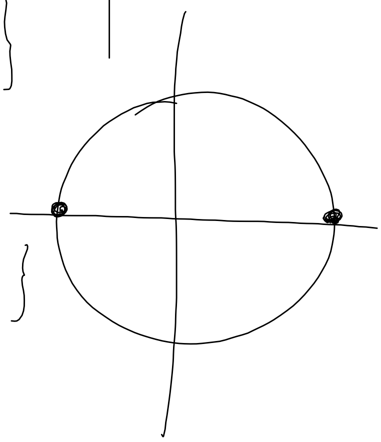


3) $\sin(x) = 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

4) $\tan(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\iff x = 0 + k\pi \iff x \in \left\{ k\pi \right\}$



5) $\tan(x) = 1$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

6) $\cot(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi \right\}$

$\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

7) $\cos(x) = 3$ et $x \in \mathbb{R}$

$\iff x \in \emptyset$ (car $3 \notin [-1; 1]$)

8) $\tan(x) = 3$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \iff x = ??$

9) $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x \in \left\{ \qquad \right\}$

9) $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\iff \tan(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\iff x \in \left\{ \dfrac{\pi}{6} + k\pi \right\}$

exemple :

8) $\tan(x) = 3$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\Leftrightarrow \quad x \cong 1{,}25 + k\pi$

$\left(\Leftrightarrow \quad x \cong 71{,}57^\circ + k \cdot 180^\circ \right)$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ 1{,}25 + k\pi \right\}$

* $\cot(x) = 3$ et $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi \right\}$

$\Leftrightarrow \quad \tan(x) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x \cong 0{,}32 + k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ 0{,}32 + k\pi \right\}$

4) $\sin(x) = \cos(x)$

$\sin(x) = \cos(x)$

Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

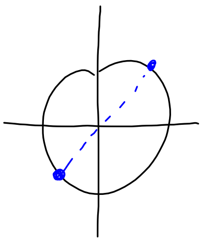
$*$ $\sin(x) = \cos(x)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 0 \cdot x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ x \in \emptyset \end{cases}$



$\sin(x) = \cos(x)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = x + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - x = -x + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 0 \cdot x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - k\pi \\ \text{ou} \\ x \in \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Résoudre l'équation : $\sin(2x) = \cos(3x)$

Résoudre l'équation : $2\cos^2(x) - 5\cos(x) - 3 = 0$

et $x \in \mathbb{R}$

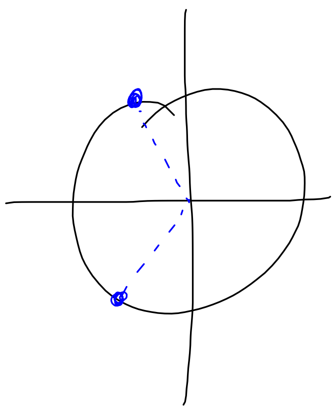
$\Leftrightarrow t = \cos(x)$ et $2t^2 - 5t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = \cos(x)$ et $(t-3)(2t+1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = 3$ ou $\cos(x) = \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$ ou $\cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi \, ; \, \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \right\}$

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = 0{,}3242$

b) $\sin x = 0{,}9531$

c) $\tan x = -1{,}4$

d) $\cos x = -0{,}7$

e) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos(4x) = -0{,}6$

g) $\sin(5x) = -0{,}6$

h) $\tan(3x) = -1$

i) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

j) $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{x}{2})$

3) Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\tan(3x) = \cot x$

c) $\sin(x+207°) + \cos(2x-13°) = 0$

d) $\tan(3x-54°) + \cot(3x) = 0$

e) $4\sin^2 t + 4\sin t - 3 = 0$

Pièces jointes

- cercle trigo-1.fig
- Histoire du degre.pdf
- radian.fig
- cercle trigo-3.fig
- cercle trigo-2.fig
- enroulement-horiz-trigo.fig
- enroulement-horiz-trigo-rad.fig
- cercle trigo-sin-cos.fig
- cercle trigo-tan-cot.fig
- fct-paire-impaire.fig
- cercle trigo-1fig.fig