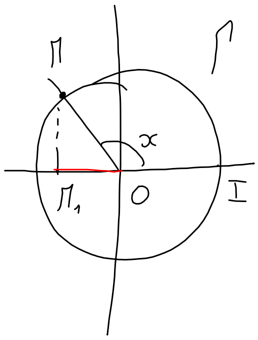
Périodicité des fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

Rappel: $\cos(x) = \overline{OM_1}$



$\llcorner\ x \in \dot{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = x + k2\pi \}$

et $\dot{x} = m_r\left(\sphericalangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})\right)$

et $M \in \Gamma = \mathcal{C}(O,1)$

et $M_1 = p_\perp(M) \in (OI)$

donc, par définition:

fig

$$\left.\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(x + k\cdot 2\pi) \\ \sin(x) &= \sin(x + k\cdot 2\pi) \end{aligned}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

On dit que les fonctions "cos" et "sin" sont périodiques de période 2π.

* Quelle est la période des fonctions "tan" et "cot":

par construction: $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

fig $\cot(x) = \cot(x + k\pi)$

la période est ici π.

$*$ Périodicité d'une fonction :

Définition : Une fonction f est dite périodique si il existe un nombre $p \in \mathbb{R}^*$ tel que 1) $\forall x \in D_f$, $(x+p) \in D_f$

et 2) $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

Définition : La période d'une fonction périodique est le plus petit nombre $p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$*$ Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques :

en effet : $\sin : \overset{x + k2\pi}{x} \longmapsto \sin(x) = \overline{OM_2} = \sin(x+k2\pi)$

$x \to \dot{x} \to \measuredangle(\vec{OI}, \vec{OM}) \to M_2 = p_{\perp}(M) \in (OJ)$

$\dot{x} = \{ z \in \mathbb{R} \mid z = x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

d'où, $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

La période du sinus est donc $p = 2\pi$

De même pour cosinus :

On a $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

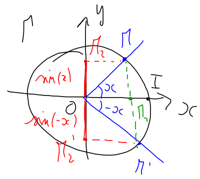
Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

preuve : 1) $\cos(x) = \cos(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On a $M = S_{(OI)}(M')$

donc $M_1 = p_\perp(M) = p_\perp(M') \in (OI)$



donc $\cos(x) = \overline{OM_1} = \cos(-x)$.

remarque : Une telle fonction est dite paire.

autres exemples : 1) $f(x) = x^2$ on a aussi

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Mais g définie par $g(x) = x^3$ est telle que

fct-paire-impaire.fig

$g(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

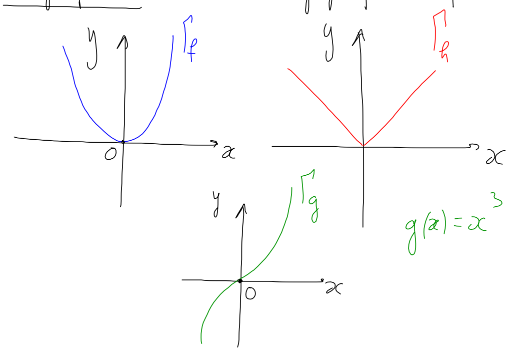
on dit que g est une fonction impaire.

f est une fonction paire.

2) h définie par $h(x) = |x|$ est paire.

car $h(-x) = |-x| = |x| = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Graphiquement : on note le graphique de f : Γ_f



et la fonction sinus : elle est impaire :

On a : $\sin(x) = \overline{OM_2} = -\overline{OM_2'} = -\sin(-x)$

$\Leftrightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

* et la tangente ? :

On a : $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$

$= -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

et la cotangente est aussi impaire :

car $\cot(-x) = \dfrac{1}{\tan(-x)} = \dfrac{1}{-\tan(x)} = -\dfrac{1}{\tan(x)}$

$= -\cot(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$

* <u>Définitions</u> : (Parité d'une fonction)

Une fonction f est dite im paire

si , $\forall x \in D_f$, $(-x) \in D_f$ et

$$\forall x \in D_f \text{ , } f(-x) = - f(x)$$

<u>exemples</u> : 1) si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $D_f = \mathbb{R}_+$

et f n'admet pas de parité :

contre-exemple : $1 \in \mathbb{R}_+$ et $(-1) \notin \mathbb{R}_+$

2) si $f(x) = x^2$, alors f est paire :

en effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$

et $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3) si $f(x) = x^3$, alors f est impaire :

en effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$

et $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = - f(x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$

Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

* La fonction "cos" est paire

mais les 3 autres sont impaires :

$\cos(-x) = \cos(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\cot(-x) = -\cot(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

× <u>Suite des formules:</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$

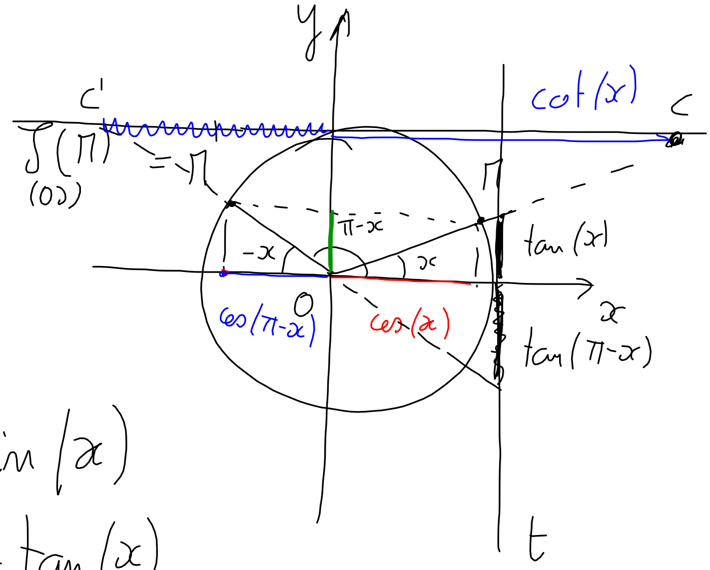
alors $\cos(\pi - x) =$

$= -\cos(x)$

et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

$\cot(\pi - x) = -\cot(x)$



Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

Pièces jointes

- cercle trigo-1.fig
- Histoire du degre.pdf
- radian.fig
- cercle trigo-3.fig
- cercle trigo-2.fig
- enroulement-horiz-trigo.fig
- enroulement-horiz-trigo-rad.fig
- cercle trigo-sin-cos.fig
- cercle trigo-tan-cot.fig
- fct-paire-impaire.fig