LA TRIGONOMETRIE : introduction

1) Origine du mot

mot formé au XVI^e siècle

Le mot trigonométrie vient du grec trigônos qui signifie triangle et de metron, mesure. Ethimologiquement, la trigonométrie a donc pour objet l'étude métrique des triangles. Le procédé utilisé à cet effet consiste à associer à chaque angle certains nombres caractéristiques.

2) Origines de la trigonométrie

Chez les Grecs, la trigonométrie est un ensemble de techniques étroitement liées à l'astronomie. Elle ne s'occupe que des figures sphériques. La trigonométrie dérive donc des recherches de l'astronome grec Hipparque de Nicée (vers 140 av. J.-C.).

3) Historique

* Antiquité : L'astronome et mathématicien grec Ménélaos (seconde moitié du I^er siècle ap. J.-C.) énonça dans son traité des "Sphériques" son célèbre théorème que restera pendant plusieurs siècles la clef de voûte de la trigonométrie sphérique.

  L'astronome grec Claude Ptolémée d'Alexandrie (v. 90 - v. 168) énonça les propositions fondamentales de la trigonométrie sphérique en se basant sur le théorème de Ménélaos.

* Les Indiens et les Arabes développèrent ces propositions, notamment dans le traité de Nasîr al-Dîn al-Tûsî (1201-1274).

* Renaissance occidentale : La trigonométrie, toujours intiment liée à l'astronomie et à l'astrologie, est surtout étudiée au XIV^e siècle par l'école d'Oxford, notamment par John Mauduith et par Richard Wallingford.

  Au XV^e siècle, Regiomontanus (Johannes Müller) (astronome et mathématicien allemand, 1436-1476) compose "De triangulis" qui fonde la trigonométrie occidentale.

  Les premiers travaux de Viète sont relatifs à la trigonométrie. Il réussit à donner, grâce à ses notations algébriques, les expressions nouvelles des lignes des multiples d'un arc. Désormais, la trigonométrie, en tant qu'étude des lignes circulaires, et l'algèbre des polynômes se prêteront un mutuel appui.

  John Napier (1550-1617), en invantant les logarithmes, fournit à la trigonométrie un instrument de calcul.

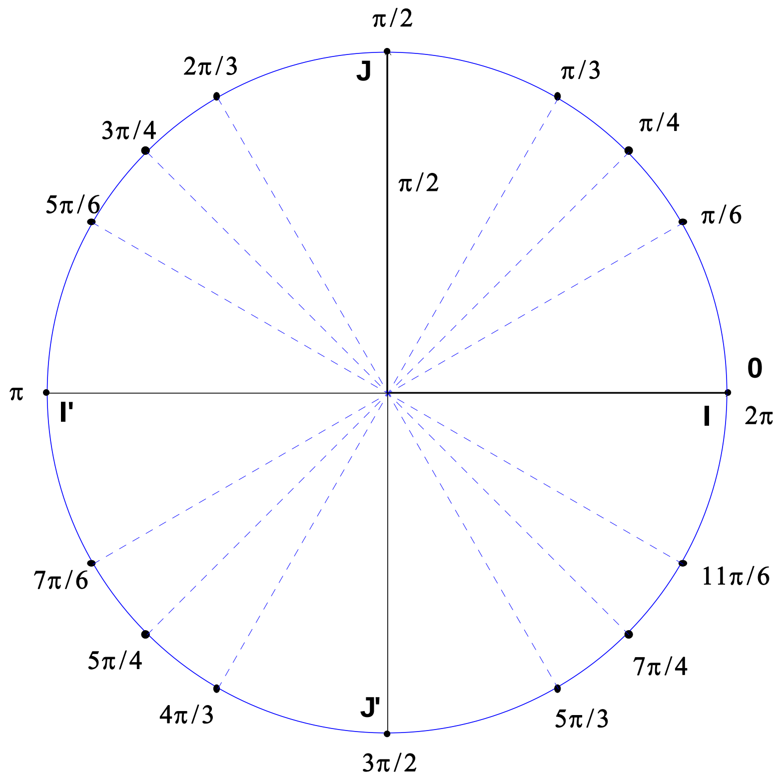
* Temps modernes : Leonhard Euler (1707-1783) donna à la trigonométrie sa forme définitive en l'étendant au domaine complexe. C'est lui qui fonda véritablement la trigonométrie moderne.

4) Applications de la trigonométrie

(1667-1748) G. Bernoulli

Les fonctions trigonométriques sont extrêmement importantes en analyse, en particulier dans la représentation des fonctions périodiques, telles que le mouvement d'un pendule ou la tension d'un courant alternatif.

La trigonométrie est utilisée en outre par les arpenteurs, dans le calcul de longueurs qui ne peuvent pas être mesurées directement



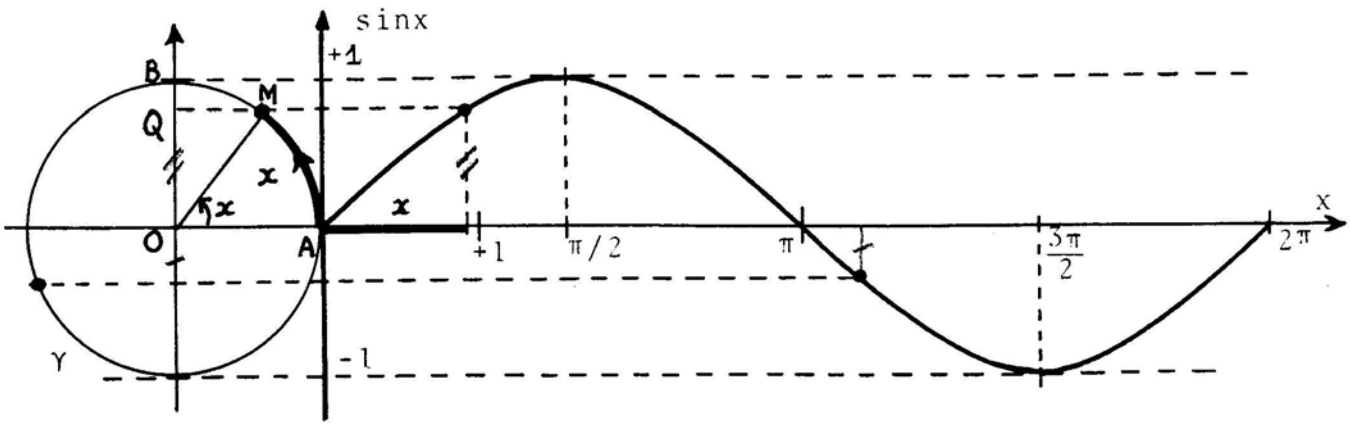
x (radian)	cos (x)	sin (x)	tan (x)	cot (x)
o				
$\pi/6$				
$\pi/4$				
$\pi/3$				
$\pi/2$				
$2\pi/3$				
$3\pi/4$				
$5\pi/6$				
π				
$7\pi/6$				
$5\pi/4$				
$4\pi/3$				
$3\pi/2$				
$5\pi/3$				
$7\pi/4$				
$11\pi/6$				
2π				

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS CIRCULAIRES

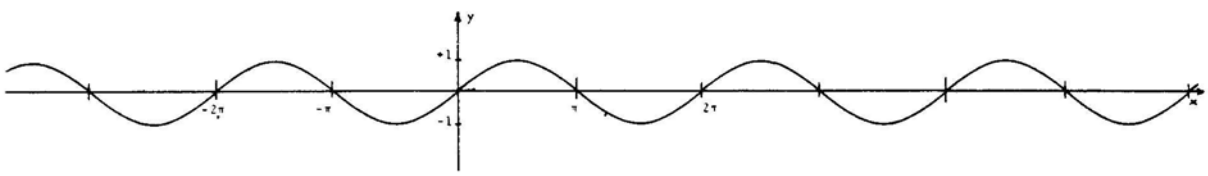
a) Fonction $x \longmapsto \sin x$

On obtient la représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto \sin x$, pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, en portant en abscisse la longueur x de l'arc $\widehat{AM}$ (décrit de A vers M dans le sens positif) et en portant en ordonnée la mesure algébrique $\overline{OQ}$. Par commodité, on prend comme origine des axes le point A du cercle trigonométrique; l'unité des axes est le rayon du cercle trigonométrique.

En prenant diverses valeurs de x, on obtient divers points du graphe.

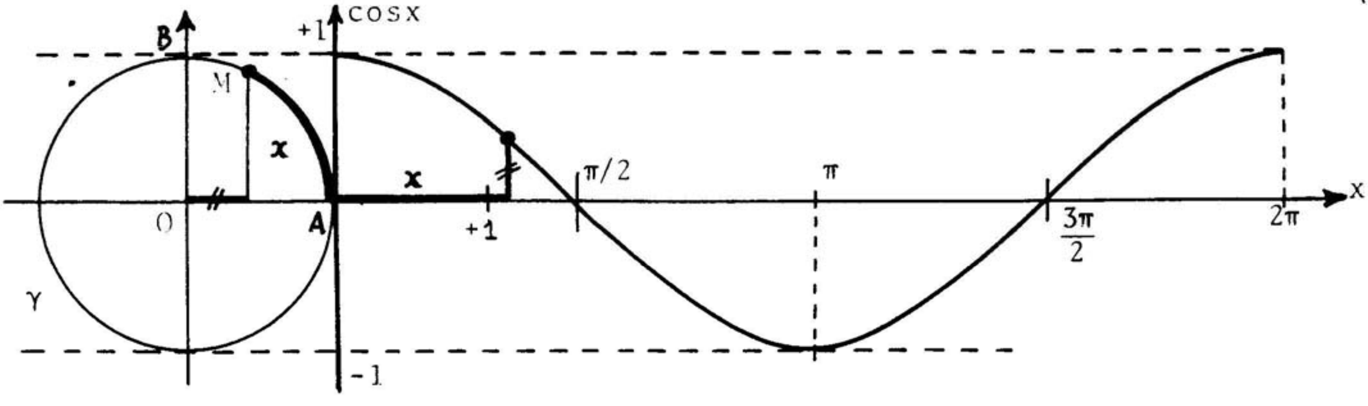


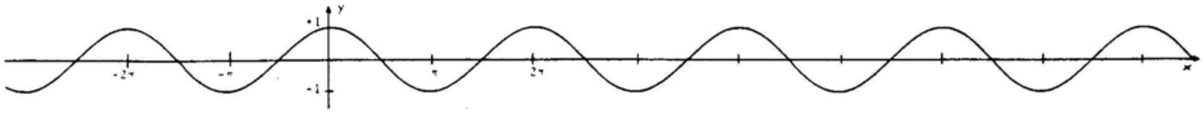
Compte tenu de la périodicité de la fonction sinus (que traduit l'égalité $\sin(x + k \cdot 2\pi) =$ $= \sin x$), on obtient la représentation graphique de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$ figurée ci-dessous :



b) Fonction $x \longmapsto \cos x$

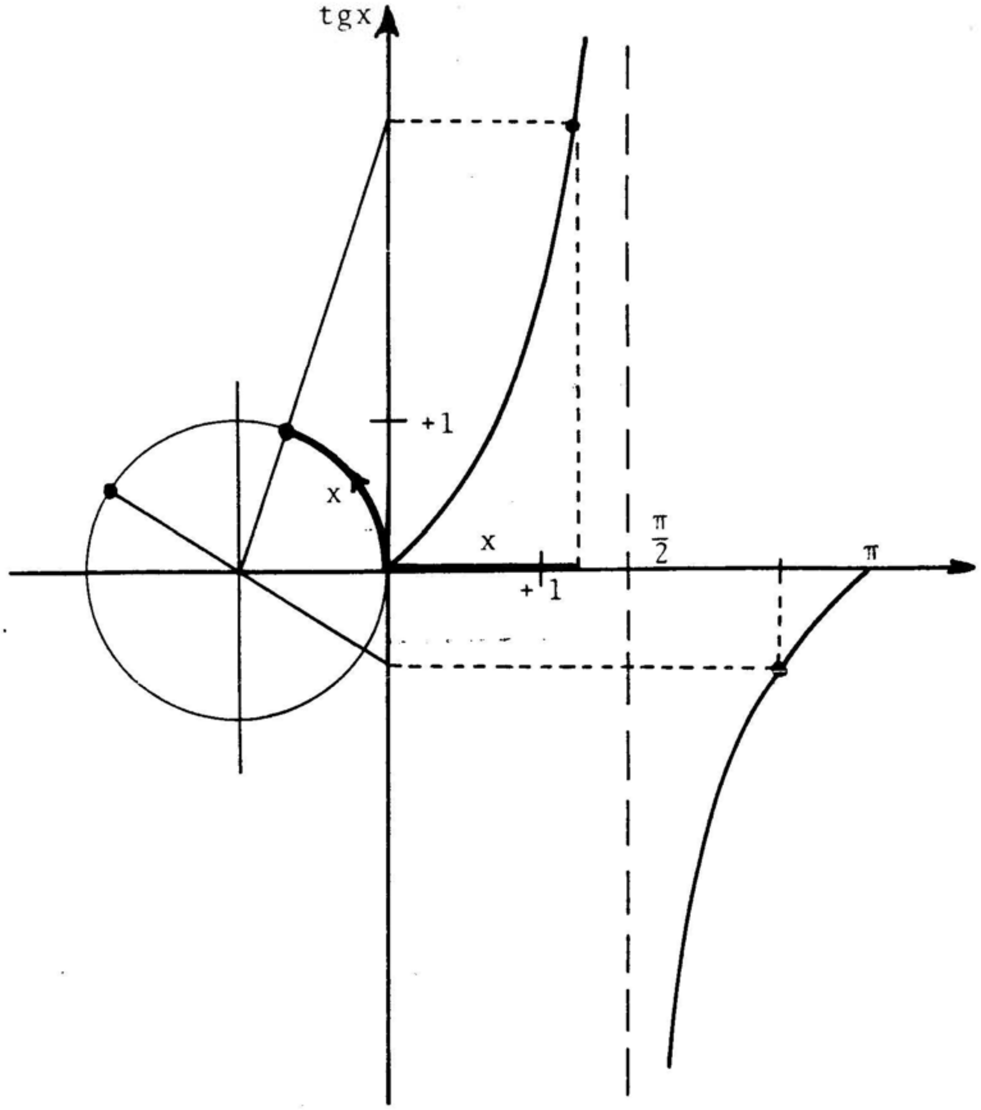
Par un procédé analogue, on obtient la représentation graphique de la fonction :
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$





c) <u>Fonction $x \longmapsto tg\,x$</u>

Comme pour le sinus et le cosinus, on obtient une représentation graphique de la fonction $x \longmapsto tg\,x$, pour $0 \leqslant x \leqslant +\pi$, en reportant sur l'axe des abscisses la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ (décrit de A vers M dans le sens positif) et en prenant l'ordonnée du point T intersection de la droite OM avec l'axe des tangentes du cercle trigonométrique.



Compte tenu de la périodicité de la fonction $x \longmapsto tg\,x$ (que traduit l'égalité : $tg\,(x + k\,\pi) = tg\,x$), on obtient la représentation graphique de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto tg\,x$ figurée ci-dessous :