2 B - C sciences Mercredi 22 avril 2020

Examen de mathématique

(Théorie : Pythagore)

1) Qu'est-ce que :
   a) une homothétie (2) b) une similitude (2)

2) Enoncer, figures à l'appui, deux (2) propriétés (2) étudiées des homothéties. (4)

3) Présenter (hypothèses et thèse), puis démontrer le théorème d'Euclide. (9)
   (avec une figure)

4) Présenter (hypothèses et thèse), puis démontrer la réciproque du théorème de Pythagore. (10)
   (avec une figure)

5) Présenter (hypothèses et thèse), puis démontrer le théorème de l'angle inscrit dans son premier cas. (avec une figure) (10)

6) Nous avons étudié le théorème de Pythagore valide pour un triangle rectangle.
   Soit un triangle ABC non rectangle. Notons a = BC, b = AC et c = AB.
   Construisons la hauteur h_c issue du sommet C et le point $H \in h_c \cap [A,B]$.
   Notons n = AH et m = HB.
   Alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot n$ (de même $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot m$).

   (3) Poser clairement les hypothèses et la thèse et illustrer d'une figure d'étude.
   Puis démontrer en suivant ces étapes :
   (2) a) appliquer Pythagore dans les deux triangles rectangles AHC et CHB ;
   (1) b) additionner membre à membre les deux égalités obtenues ;
   (2) c) en utilisant l'axiome de la distance pour les points A, H et B, conclure. (8)

45 pts

1a)

Définition 18 On appelle **homothétie** de centre A et de rapport r ($r \neq 0$) l'application

$\mathcal{H}_{(A,r)} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$

2

$$M \mapsto M' = \mathcal{H}_{(A,r)}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM'} = r \cdot \overrightarrow{AM}$$

1b)

Définition 19 Si $\mathcal{H}_{(A,r)}$ est une homothétie et f une isométrie, alors on appelle **similitudes** les composés $f \circ \mathcal{H}_{(A,r)}$ et $\mathcal{H}_{(A,r)} \circ f$.

2

Deux figures sont dites **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une similitude.

4

2)

THEOREME 21 Par une homothétie $\mathcal{H}_{(A,r)}$:

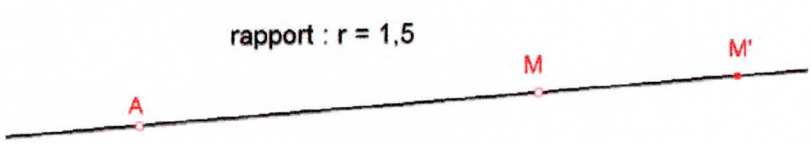
1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par le facteur constant $|r|$;
3. le centre, un point et son image sont sur une droite;
4. une droite passant par le centre est globalement invariante;
5. toute droite a pour image une droite parallèle;
6. l'image d'une demi-droite est une demi-droite;
7. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
8. les mesures des angles sont conservées.

2

3)

homothétie de centre A et de rapport r :
M' est l'image de M

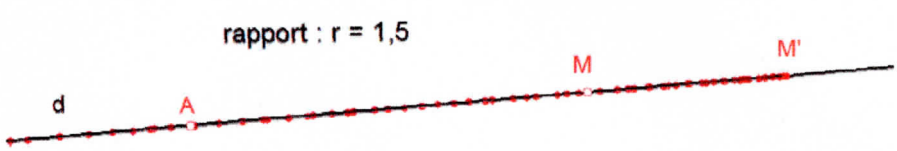
1



4)

homothétie de centre A et de rapport r :
la droite d passant par A est globalement invariante

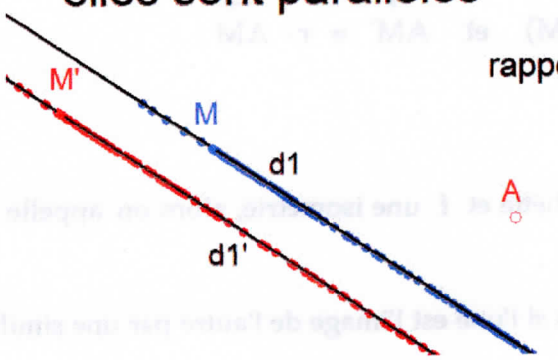
1



4

5)

homothétie de centre A et de rapport r :
la droite d1 admet d1' comme image :
elles sont parallèles



rapport : r = 1,5

Les droites d1 et d1' sont parallèles

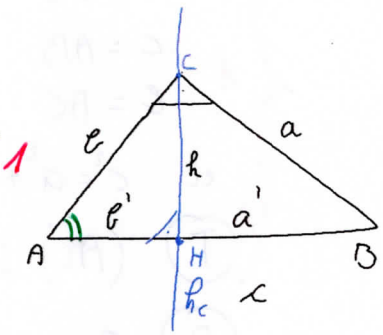
le théorème d'Euclide

Hypothèses

Soit un triangle ΔABC rectangle en C et la hauteur h_c issue du sommet C et $H \in h_c \cap (AB)$

et

$AB = c$
$AC = b$
$BC = a$
$AH = b'$
$HB = a'$



1 thèse $b^2 = b' \cdot c$ et $a^2 = a' \cdot c$

démonstration

on a $\Delta ABC \sim \Delta AHC$ (par le critère AAA du théorème 23)

car $\measuredangle AHC = \measuredangle BCA$ (angle droit) * par (H)

donc on peut leur appliquer le critère CCC :

$$\left(\frac{a}{h} =\right) \frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \quad \left(\frac{\Delta ABC}{\Delta AHC}\right)$$

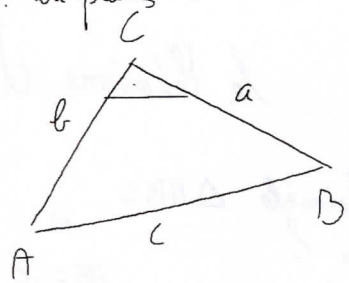
$$\Leftrightarrow \boxed{b^2 = b' \cdot c}$$

en utilisant : $\Delta ABC \sim \Delta CHB$ on aura $\boxed{a^2 = a' \cdot c}$

cqfd

* et $\measuredangle CAH = \measuredangle CAB$ (évident)

réciproque de Pythagore : en français ...



(H) un triangle ΔABC

$a = BC$

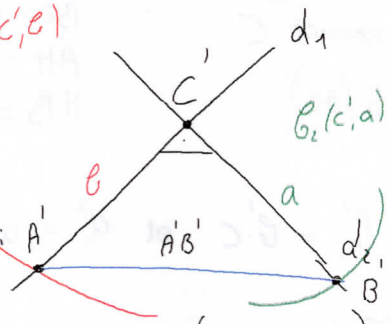
$c = AB$ 1

$b = AC$

et $c^2 = a^2 + b^2$

1 (T) $(AC) \perp (BC)$:

(D) On construit le triangle $\Delta A'B'C'$ ainsi :



1 (figure)

* $C' \in (P)$
* $d_1 \ni C'$ et $d_2 \ni C'$ et $d_2 \perp d_1$ (axiome de l'équerre)
* le cercle $\mathcal{C}_1(C', b)$ et $A' \in \mathcal{C}_1 \cap d_1$ (axiome du compas) 2
et $\mathcal{C}_2(C', a)$ et $B' \in \mathcal{C}_2 \cap d_2$

Donc, le triangle $\Delta A'B'C'$ étant rectangle en C' par construction,

1 on a, par Pythagore (direct) : $A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$

$\iff A'B'^2 = a^2 + b^2$

1 or, par (H), $a^2 + b^2 = c^2 \ (= AB^2)$

1 $\implies A'B'^2 = c^2 \overset{\text{alg.}}{\implies} A'B' = \pm c$ (car $A'B' > 0$)

1 Donc les triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$ sont semblables car, Thm 23 critère CCC : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = 1$

(ces 2 triangles sont même isométriques)

1 donc on peut leur appliquer le critère AAA :

ainsi $\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA}$

et $(AC) \perp (BC)$ cqfd

10

Le théorème de l'angle inscrit

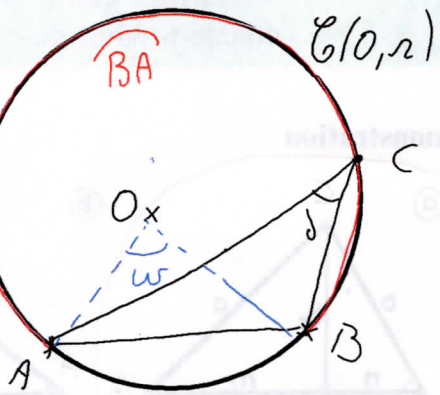
(H) un cercle $\mathcal{C}(O,r)$, $r \in \mathbb{R}_+^*$

$\{A,B\} \subset \mathcal{C}$

1 $\{C\} \subset \overset{\frown}{BA}$

3 $\measuredangle BCA = \measuredangle \delta$

1 (T) $\delta = \frac{1}{2}\omega$



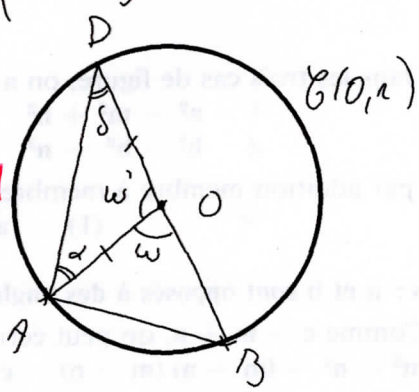
(D) Cas (1)

1 Soit la cade $[B,D] \ni O$ ($[B,D]$ est un diamètre)

soit $\measuredangle BOA = \measuredangle \omega$

1 $\measuredangle DAO = \measuredangle \alpha$

$\measuredangle AOD = \measuredangle \omega'$



1 On a le triangle ΔAOD est isocèle car $OA = OD = r$ (par hyp)

1 donc $\alpha = \delta$

2 On a (Thms): $\alpha + \delta + \omega' = 180°$ et $\omega + \omega' = 180°$ $\Rightarrow$

$\omega = \alpha + \delta$ ou $\alpha = \delta$ (1) $\Rightarrow \omega = 2\delta$

cqfd

10

THÉORÈME 56. Théorème de Pythagore généralisé.
Dans un triangle, le carré d'un côté a égale la somme des carrés des deux autres côtés b et c, diminuée ou augmentée — suivant que a est opposé à un angle aigu ou non — du double produit de c par la projection de b sur c.

(*)

Démonstration

fig. 1

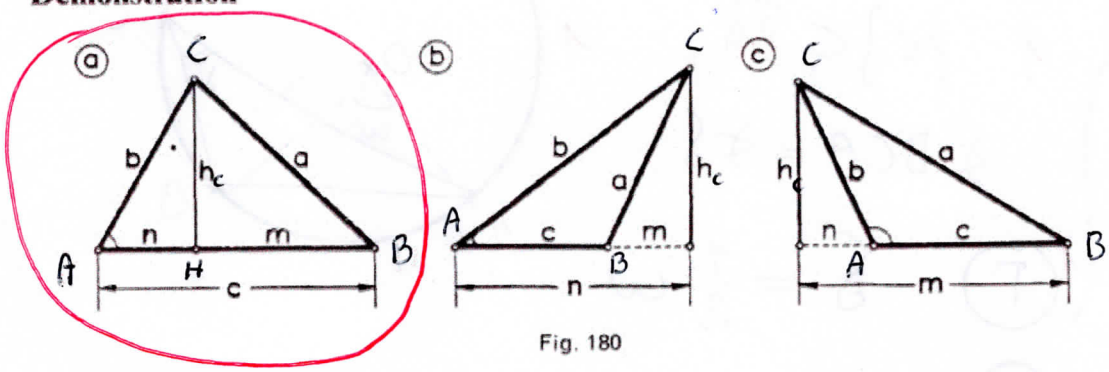


Fig. 180

La démonstration diffère évidemment suivant que **a** est opposé à un angle aigu ou non. Lorsque **a** est opposé à un angle aigu, nous examinerons séparément le cas où **b** est opposé à un angle aigu et celui où il ne l'est pas. Dans tous les cas, nous appellerons **m** la projection de **a** sur **c**, **n** la projection de **b** sur **c** et **h** la hauteur correspondant à **c**.

Dans les trois cas de figure, on a:

1 $a^2 = m^2 + h^2$ (théorème de Pythagore)

1 $h^2 = b^2 - n^2$ (théorème de Pythagore)

D'où, par addition membre à membre:

1 (1) $a^2 = b^2 + (m^2 - n^2)$

1er cas : a et b sont opposés à des angles aigus (fig. 180 a).

2 Comme $c = m + n$, on peut écrire:

$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = c \cdot (m + n - 2n) = c \cdot (c - 2n) = c^2 - 2cn$

Et, en portant cette valeur dans (1), on obtient:

(2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$

2e cas : b n'est pas opposé à un angle aigu (fig. 180 b).

Nous avons alors $c = n - m$; d'où:

$m^2 - n^2 = (n - m)(-m - n) = c \cdot (n - m - 2n) = c \cdot (c - 2n) = c^2 - 2cn$

En portant cette valeur dans (1), on retrouve (2).

3e cas : a n'est pas opposé à un angle aigu (fig. 180 c).

Dans ce cas, $c = m - n$; par suite:

$m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = c \cdot (m - n + 2n) = c \cdot (c + 2n) = c^2 + 2cn$

En portant cette valeur dans (1), on trouve:

(3) $a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$ C.Q.F.D.

8

(*) (H) un triangle ABC quelconque, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
h_c la hauteur issue de C et $h_c \cap [A,B] = \{H\}$
1 $n = AH$ et $m = HB$
1 (T) $a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$