

Ainsi :  $360^\circ$  correspond à  $2\pi$  [radian]

Soit le tableau de correspondance suivant :

20 Compléter:

|                 |    |    |     |     |     |                 |                 |                 |                  |                  |   |        |       |
|-----------------|----|----|-----|-----|-----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|---|--------|-------|
| $\mu_d(\alpha)$ | 90 | 60 | 120 | 135 | 270 |                 |                 |                 |                  |                  |   |        |       |
| $\mu_r(\alpha)$ |    |    |     |     |     | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | 1 | $2\pi$ | $\pi$ |

Soit  $x$  radian, alors  $y = \frac{180}{\pi} \cdot x$  [degré]

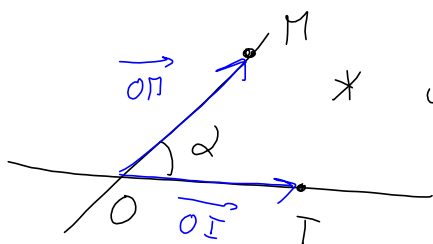
Soit  $x$  degré, alors  $y = \frac{\pi}{180} \cdot x$  [radian]

\* En trigonométrie on utilise :

- des angles orientés
- et des mesures d'angles (orientés) en radian.

\* Qu'est-ce qu'un "angle orienté" ?

notation : \* Un angle orienté ne "s'utilise" qu'en géométrie ANALYTIQUE, c'est-à-dire dans un repère R.O.N.



\* sa notation :  $\angle \alpha = \angle \text{IOM}$   
 $= \angle (\vec{OI}, \vec{OM})$

\* mesure de angles orientés : cf axiome.

Ainsi :  $360^\circ$  correspond à  $2\pi$  [radian]

Soit le tableau de correspondance suivant :

20 Compléter:

|                        |                 |                 |                  |                  |                  |                 |                 |                 |                  |                  |             |             |             |
|------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\mu(\angle \alpha)$   | 90              | 60              | 120              | 135              | 270              | $45^\circ$      | $36^\circ$      | $30^\circ$      | $135^\circ$      | $225^\circ$      | $573^\circ$ | $360^\circ$ | $180^\circ$ |
| $\mu_r(\angle \alpha)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | 1           | $2\pi$      | $\pi$       |

Soit  $x$  radian, alors  $y = \frac{180}{\pi} \cdot x$  [degré]

Soit  $x$  degré, alors  $y = \frac{\pi}{180} \cdot x$  [radian]

## Chapitre 6 Trigonométrie

|          |                                   |
|----------|-----------------------------------|
| <b>1</b> | <b>Mesure des angles orientés</b> |
|----------|-----------------------------------|

**Définition 1** Un **angle** (non orienté) est une classe d'équivalence de secteurs relativement à l'isométrie. L'ensemble des angles non orientés est noté  $A$ .

**Définition 2** On appelle **secteur orienté** un couple  $([ABC], [B,A])$  où  $[ABC]$  est un secteur et  $[B,A]$  une des frontières du secteur appelée "première frontière".

**THEOREME 1** Si l'on pose  $([ABC], [B,A]) \mathcal{R} ([A'B'C'], [B',A'])$  si et seulement si les deux secteurs ont même orientation et  $[ABC]$  et  $[A'B'C']$  sont isométriques, alors on a une relation d'équivalence dans l'ensemble des secteurs non nuls, non tour.

**Définition 3** On appelle **angle orienté** l'un des ensembles suivants

- a) une classe d'équivalence de secteurs orientés relativement à la relation  $\mathcal{R}$  du théorème précédent
- b) l'ensemble des secteurs orientés nuls et tour noté  $\angle \omega$  et appelé angle nul.

$$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = \angle \omega \text{ l'angle nul (orienté).}$$

Notation

$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle \alpha$ ,  $[B,A)$  étant la première frontière du secteur orienté  $([ABC], [B,A))$ .

$\mathcal{A}$  pour l'ensemble des angles orientés.

On admettra l'axiome suivant pour la mesure des angles orientés.

### AXIOME

La mesure en radians des angles orientés est une application

$$m_{\text{radian}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} / 2\pi$$

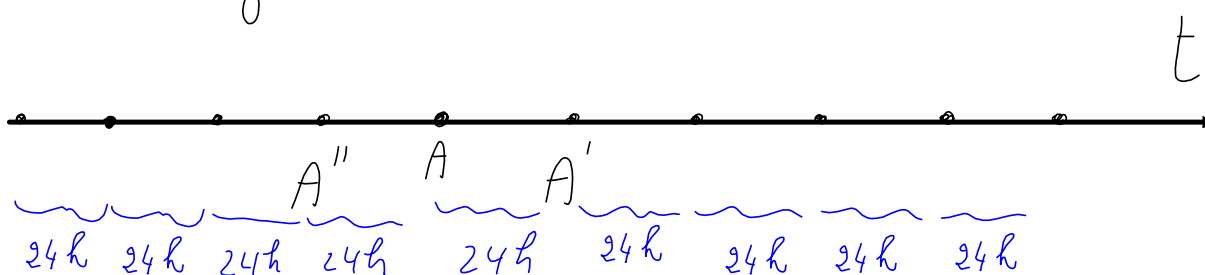
$$\lambda(\vec{OA}, \vec{OB}) \mapsto \dot{x} = m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OA}, \vec{OB}))$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

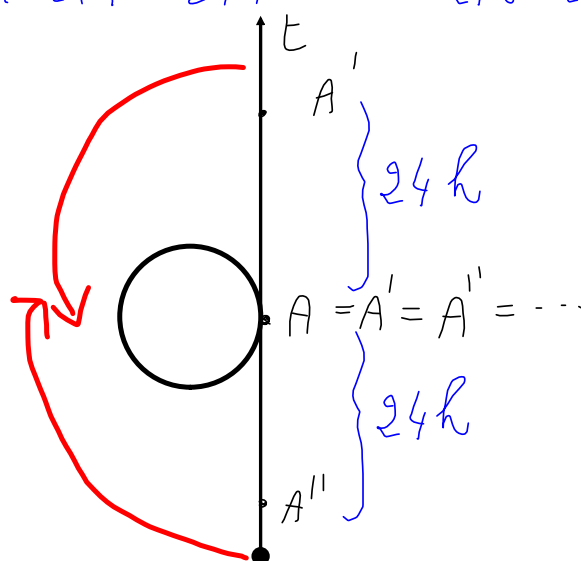
- 1  $m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OA}, \vec{OA})) = 0$
- 2  $m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OA}, \vec{OB})) = \dot{x}$  si  $x = \mu_{\text{rad}}(\lambda AOB)$  et  $\lambda(\vec{OA}, \vec{OB})$  est d'orientation directe
- 3  $m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OA}, \vec{OB})) = m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OA}, \vec{OC})) + m_{\text{rad}}(\lambda(\vec{OC}, \vec{OB}))$  (Chasles)

Pour comprendre l'ensemble  $\mathbb{R}/2\pi$ ,

"regardons" LE TEMPS :



ou



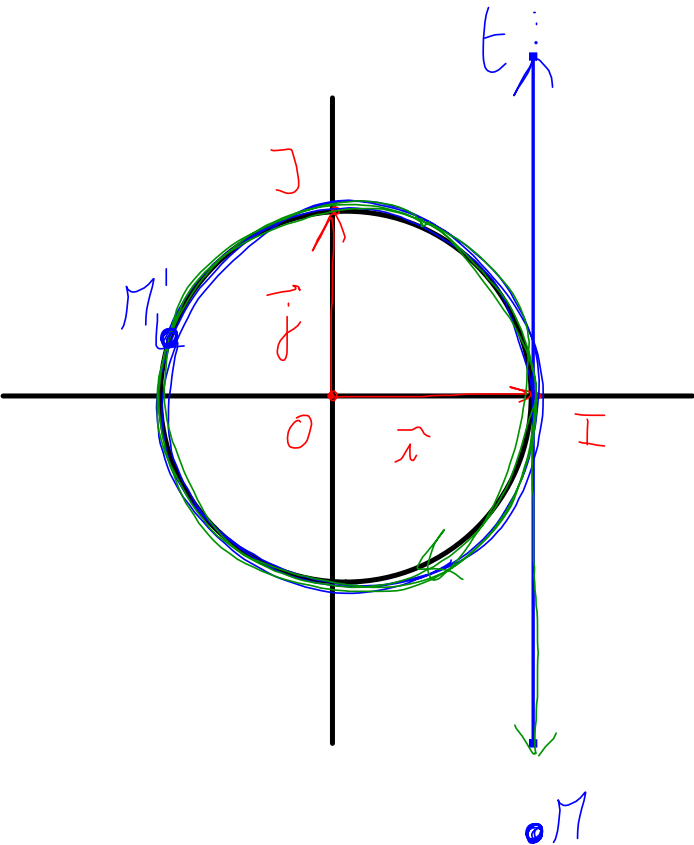
Remarque

On peut illustrer les notions précédentes de la manière suivante.

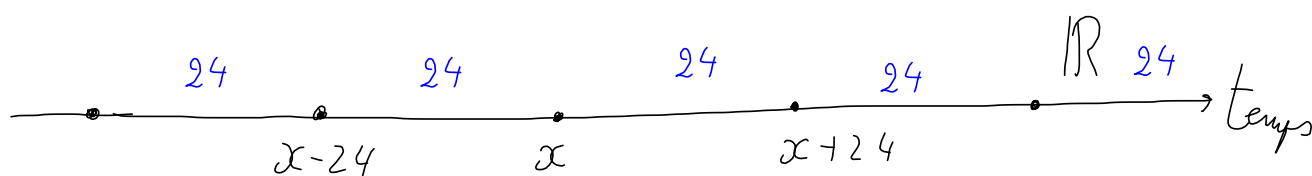
Dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ , on considère l'axe  $(I, \vec{OJ})$  tangent au cercle  $C_{(O,1)}$ .  $\vec{OJ} = t$

Si l'on "enroule" sur le cercle le demi-axe positif dans le sens direct et le demi-axe négatif dans le sens rétrograde, on constate que tous les points de l'axe dont les abscisses diffèrent de  $2\pi$  (mesure du périmètre du cercle) se superposent sur le même point  $M$  du cercle. On obtient ainsi une surjection de l'ensemble des points de l'axe sur l'ensemble des points de cercle ou une bijection de l'ensemble des classes de réels modulo  $2\pi$  vers l'ensemble des points du cercle  $C_{(O,1)}$ .

On peut poser  $\dot{x} = m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OI}, \vec{OM}))$ .



\* Kesato  $x$  avec  $x \in \mathbb{R}$  ?



$$\begin{aligned} \mathcal{O}x &= \{x ; x-24 ; x-48 ; \dots ; x+24 ; \dots\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + k \cdot 24, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

\* Soit la relation d'équivalence " $\equiv$ "

(congruence) dans l'ensemble  $\mathbb{R}$

définie ainsi:  $x \equiv y \iff x - y = k \cdot 2\pi$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$

Cette relation est une relation d'équivalence :

1) Reflexive:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \equiv x$

$$\text{car } x - x = 0 = 0 \cdot 2\pi$$

2) Symétrique:  $\forall \{x; y\} \subset \mathbb{R}, x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$   
 en effet:  $x \equiv y \Rightarrow x - y = k \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow y - x = (-k) \cdot 2\pi \Rightarrow y \equiv x$$

3) Transitive:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \{x; y; z\} \subset \mathbb{R}, x \equiv y \\ \text{et} \\ y \equiv z \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv z$$

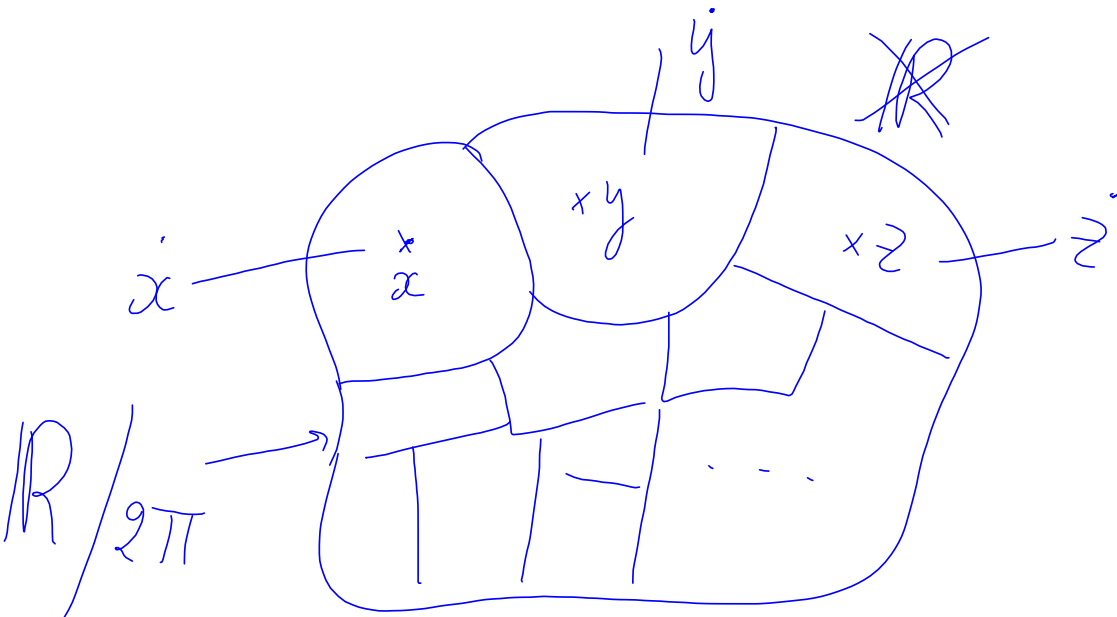
preuve:  $\left. \begin{array}{l} x \equiv y \\ \text{et} \\ y \equiv z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = k \cdot 2\pi \\ \text{et} \\ y - z = k' \cdot 2\pi \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{algèbre}}$

$$\begin{aligned} (x - y) + (y - z) &= k \cdot 2\pi + k' \cdot 2\pi \xRightarrow{\text{alg.}} \\ x - z &= (k + k') \cdot 2\pi \Rightarrow x \equiv z \end{aligned}$$

q.e.d.

Alors, l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  muni  
 de la relation d'équivalence " $\equiv$ " devient

$$\mathbb{R}/2\pi = \{x; y; z; \dots\} \text{ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence}$$



On admettra l'axiome suivant pour la mesure des angles orientés.

### AXIOME

La mesure en radians des angles orientés est une application

$$m_{\text{radian}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} / 2\pi$$

$$\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) \mapsto x = m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OA}, \vec{OB}))$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$1 \quad m_{\text{rad}}(\angle \omega) = 0$$

$$2 \quad m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OA}, \vec{OB})) = x \quad \text{si} \quad x = \mu_{\text{rad}}(\angle AOB) \quad \text{et} \quad \angle(\vec{OA}, \vec{OB}) \text{ est d'orientation directe}$$

$$3 \quad m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OA}, \vec{OB})) = m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OA}, \vec{OC})) + m_{\text{rad}}(\angle(\vec{OC}, \vec{OB})) \quad (\text{Chasles})$$

Pièces jointes

---



cercle trigo-1.fig



Histoire du degre.pdf



radian.fig