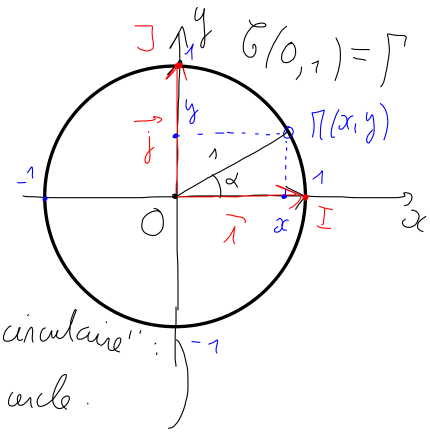
§ 2 Les angles orientés.

* Soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ R.O.N.

et le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ de centre O et de rayon 1.



(remarque : cette trigonométrie s'appelle "la trigonométrie circulaire" : Tout est construit sur un cercle.)

Soit $M(x,y) \in \mathcal{C}(O,1) \iff x^2 + y^2 = 1$

<u>Notation</u> : $\mathcal{C}(O,1) = \Gamma$ (gamma) : le cercle trigonométrique

On a : $M(x,y) \in \Gamma \iff x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1; 1]$

* Pour "repérer" le point M sur le cercle Γ,

on a : $\forall M \in \Gamma, \ OM = 1$ figure cabri

et l'angle $\measuredangle \alpha$: comment le définir ici ?

* On va définir les angles <u>orientés</u>, qui ne sont pas de même <u>nature</u> que nos "angles géométriques" (angles non orientés)

* <u>Les angles orientés</u> :

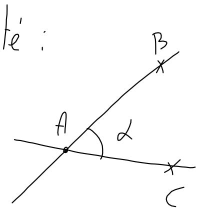
Les angles en trigonométrie sont <u>des angles orientés</u>.

<u>Rappel</u> : les angles non orientés (en géom. euclidienne)

On note ainsi un angle non orienté :

$\measuredangle \alpha = \measuredangle BAC$

$(= \widehat{BAC})$



Pour la mesure de tels angles, on utilise le RAPPORTEUR ou axiome de la mesure des angles non orientés.

<u>Le voici</u> :

Rappel

On dispose déjà de la mesure des angles (mode d'emploi du rapporteur) avec, pour A l'ensemble des angles non orientés, l'application $\mu_{degré} : A \to [0, 360]$

$$\measuredangle\alpha \mapsto \mu_{degré}(\measuredangle\alpha) = x$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\mu_{degré}(\measuredangle\alpha) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle\alpha = \measuredangle\omega$ (l'angle nul non orienté)

2 $\mu_{degré}(\measuredangle p) = 180$ pour $\measuredangle p$ l'angle plat

3 $\mu_{degré}(\measuredangle AOB) = \mu_{degré}(\measuredangle AOC) + \mu_{degré}(\measuredangle COB) \Leftrightarrow$ [AOC] et [COB] sont adjacents

4 $\mu_{degré}$ est surjective.

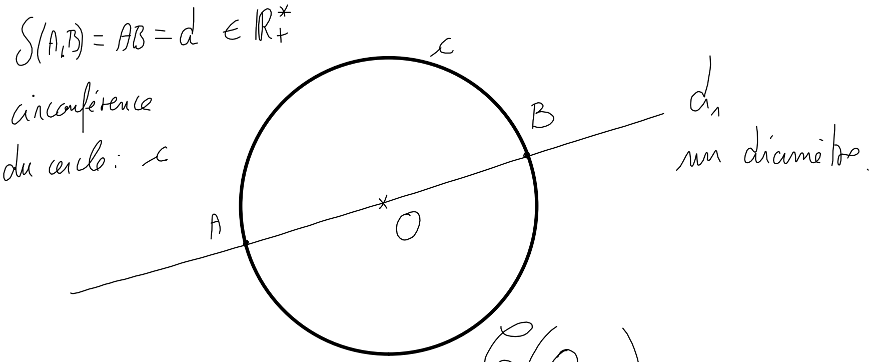
Autre rapporteur utilisé dans certaines mondes mathém. :

On utilise parfois une <u>autre unité</u> d'angle non orienté :

le radian.

Historiquement, le radian est lié au nombre π :

<u>Définition</u> : Le nombre π est le rapport de la circonférence d'un cercle par son diamètre.



Alors : $\dfrac{c}{d}$ = constant

on note ce rapport : $\dfrac{c}{d} = \pi$ (pi) $(\pi \notin \mathbb{Q}\ ?)$

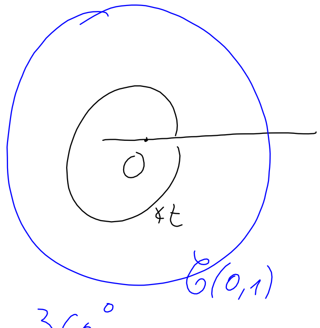
* expérience sur Cabri-géomètre. figure-cabri

* Mesure en radian d'angle :

Soit $\measuredangle t$ l'angle tour :

et $\mu_d(\measuredangle t) = 360°$

Soit le cercle $\mathcal{C}(O,1)$



de O, on regarde le cercle à 360° :

sa circonférence vaut : 2π.

Ainsi : 360° correspond à 2π [radian]

Soit le tableau de correspondance suivant :

20 Compléter:

$\mu_d(\sphericalangle\alpha)$	90	60	120	135	270								
$\mu_r(\sphericalangle\alpha)$						$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	1	2π	π

Soit x radian, alors $y = \frac{180}{\pi} \cdot x$ [degré]

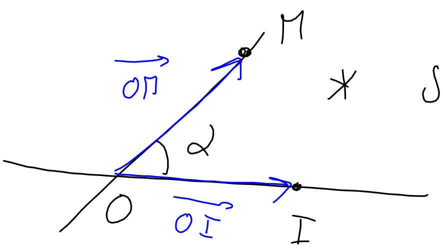
Soit x degré, alors $y = \frac{\pi}{180} \cdot x$ [radian]

* En trigonométrie on utilise :

- des angles orientés
- et des mesures d'angles (orientés) en radian.

* Qu'est-ce qu'un "angle orienté" ?

notation: * Un angle orienté ne "s'utilise" qu'en géométrie ANALYTIQUE, c'à d dans un repère R.O.N.



* sa notation : $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \cancel{IOM}$

$= \sphericalangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

* mesure de angles orientés : Cf axiome.

Notation

$\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \measuredangle\alpha$, [B,A) étant la première frontière du secteur orienté ([ABC], [B,A)) .
$\mathscr{A}$ pour l'ensemble des angles orientés.

$$\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = \measuredangle\omega \quad \text{l'angle nul (orienté).}$$

On admettra l'axiome suivant pour la mesure des angles orientés.

AXIOME

La mesure en radians des angles orientés est une application

$$m_{\substack{\cancel{\text{radian}} \\ r}} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}/2\pi \quad ?$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \mapsto \dot{x} = m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) \quad ?$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\quad m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle\, \omega) = \dot{0}$

2 $\quad m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \dot{x}$ **si** $x = \mu_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle\, AOB)$ **et** $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ **est d'orientation directe**

3 $\quad m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})) + m_{\substack{\cancel{\text{rad}} \\ r}}(\measuredangle(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}))$ (Chasles)

Chapitre 6 Trigonométrie

1 Mesure des angles orientés

Définition 1 Un **angle** (non orienté) est une classe d'équivalence de secteurs relativement à l'isométrie. L'ensemble des angles non orientés est noté A.

Définition 2 On appelle **secteur orienté** un couple ([ABC], [B,A)) où [ABC] est un secteur et [B,A) une des frontières du secteur appelée "première frontière".

Définition 3 On appelle **angle orienté** l'un des ensembles suivants

a) une classe d'équivalence de secteurs orientés relativement à la relation $\mathcal{R}$ du théorème précédent

b) l'ensemble des secteurs orientés nuls et tour noté $\measuredangle\,\omega$ et appelé angle nul.