

Chapitre 6 : Pythagore cours n°3

... en route vers ... le théorème de Pythagore
en suivant les étapes suivantes :

- ✓ 1) Les homothéties :
 - définition 18
 - Théorèmes : 18 - ~~19~~ - ~~20~~ - 21
- ✓ 2) Les similitudes : définition 19
- 3) Le Théorème 23

Rappel :

Définition 10 On appelle **isométrie** dans le plan $\mathbf{P}$ toute application du plan vers lui-même qui conserve la distance.

Définition 11 Deux ensembles de points (figures) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dits **isométriques** lorsqu'il existe une isométrie f transformant $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$, c'est-à-dire telle que $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

(remarque : $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont alors "superposables")
(m même et m taille)

* On a 4 isométries :

- 1) symétrie axiale
- 2) symétrie centrale
- 3) translation
- 4) rotation

Définition 19 Si $\mathcal{H}_{(A,r)}$ est une homothétie et f une isométrie, alors on appelle **similitudes** les composés $f \circ \mathcal{H}_{(A,r)}$ et $\mathcal{H}_{(A,r)} \circ f$.

Deux figures sont dites **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une similitude.

* Explications "non mathématiques" :

* 2 cercles sont toujours semblables

* 2 cercles " " " "

* 2 triangles équilatéraux " "

* 2 rectangles non

* 2 triangles non plus ...

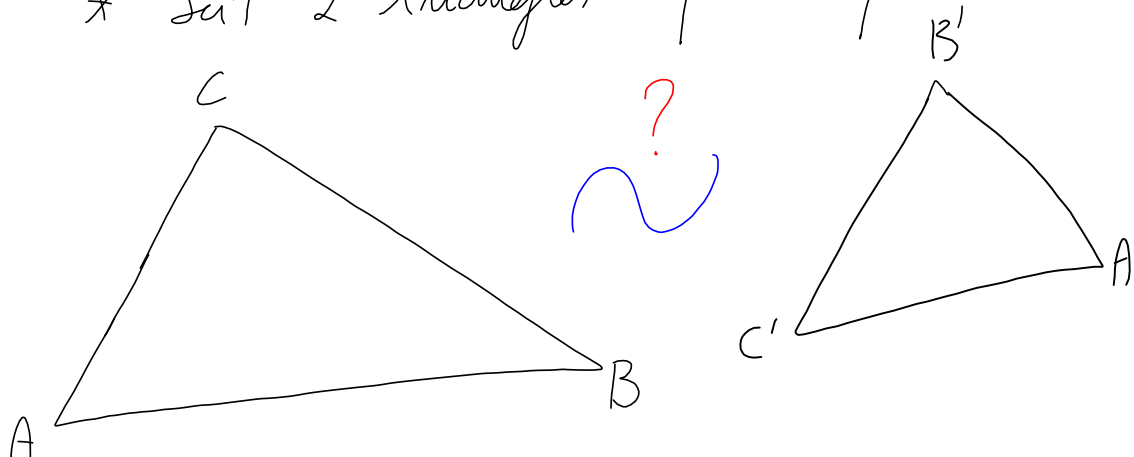
On dira (brutalement) que 2 figures sont semblables si en agrandissant (rétrécissant) l'une d'elles, on peut alors les superposer

* Le théorème 23:

* Notation: F_1 et F_2 sont figures semblables

$$\Leftrightarrow F_1 \sim F_2$$

* Soit 2 triangles quelconque:



THEOREME 23 (1) Deux triangles qui ont deux secteurs respectivement isométriques sont semblables.

(2) Deux triangles qui ont un secteur isométrique dont les frontières portent des côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

(3) Deux triangles qui ont leurs trois côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

voir mon cours sur les angles téléchargeable sur notre page web

3	L'angle et sa mesure
----------	-----------------------------

Les mesures servent à comparer des figures par l'intermédiaire des nombres. La longueur des segments est donnée par l'axiome de la distance qui, à chaque couple de points, associe un nombre de $\mathbb{R}_+$. La mesure des angles est utilisée pour construire des triangles, des figures avec des nombres fournis par le rapporteur.

Les secteurs

Définition 3 On appelle **secteur** l'un des cinq ensembles suivants.

Si $A \notin (BC)$ et $\overline{IP_1} - (AB) = P_1$ et $C \in P_1$ et $\overline{IP_2} - (AC) = P_2$ et $B \in P_2$

a) L'intersection des deux demi-plans fermés à frontières sécantes, nommée **secteur saillant**.

Notation: $\overline{IP_1} \cap \overline{IP_2} = [BAC]^s$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

b) La réunion des complémentaires dans P des deux demi-plans ouverts à frontières sécantes, nommée **secteur rentrant**.

Notation: $(P - P_1) \cup (P - P_2) = [BAC]^r$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

c) Une demi-droite $[A,B)$, nommée **secteur nul**, avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,B)$ pour frontières.

d) Un demi-plan fermé sur la frontière duquel on a distingué un point, nommé **secteur plat**.

Notation: Si $A \in [B,C)$, $\overline{IP_1}_A$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières, ou $\overline{IP_1}_A = [BAC]^p$.

e) Le plan dans lequel on a distingué une demi-droite, nommé **secteur tour**.

Définition 3 On appelle **secteur** l'un des cinq ensembles suivants.

Si $A \notin (BC)$ et $\overline{IP_1} - (AB) = P_1$ et $C \in P_1$ et $\overline{IP_2} - (AC) = P_2$ et $B \in P_2$

a) L'intersection des deux demi-plans fermés à frontières sécantes, nommée **secteur saillant**. *est un secteur*

Notation: $\overline{IP_1} \cap \overline{IP_2} = [BAC]^s$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

b) La réunion des complémentaires dans P des deux demi-plans ouverts à frontières sécantes, nommée **secteur rentrant**.

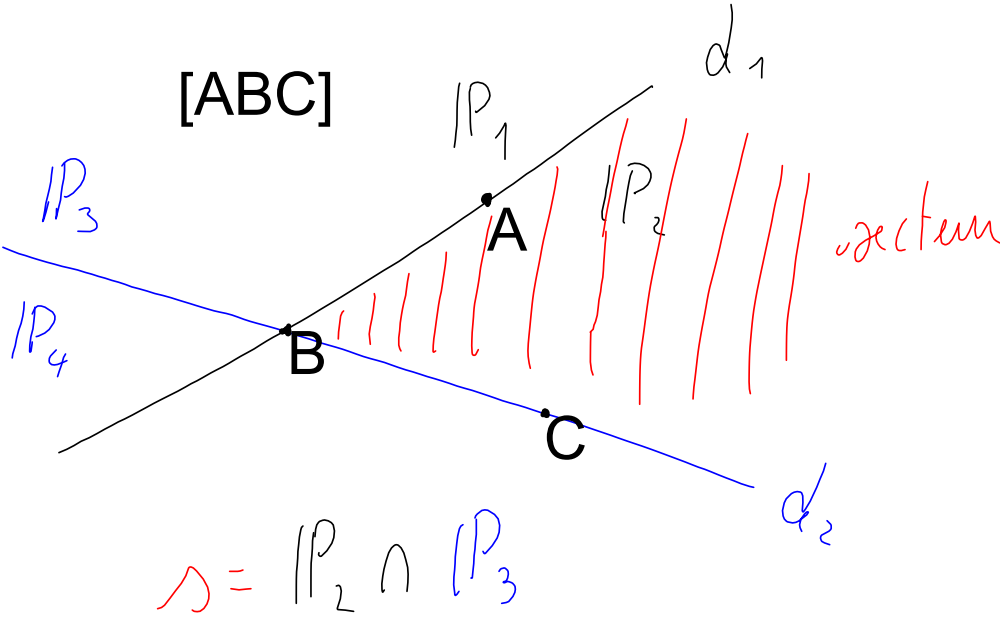
Notation: $(P - P_1) \cup (P - P_2) = [BAC]^r$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

c) Une demi-droite $[A,B)$, nommée **secteur nul**, avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,B)$ pour frontières.

d) Un demi-plan fermé sur la frontière duquel on a distingué un point, nommé **secteur plat**.

Notation: Si $A \in [B,C)$, $\overline{IP_1}_A$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières, ou $\overline{IP_1}_A = [BAC]^p$.

e) Le plan dans lequel on a distingué une demi-droite, nommé **secteur tour**.



Les angles

THEOREME 5 La relation $\mathcal{R}$, définie dans l'ensemble des secteurs par $[ABC] \mathcal{R} [A'B'C']$ si et seulement si par une isométrie f , $f([ABC]) = [A'B'C']$, est une relation d'équivalence.

Définition 5 On appelle **angle** une classe d'équivalence selon la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble des secteurs.

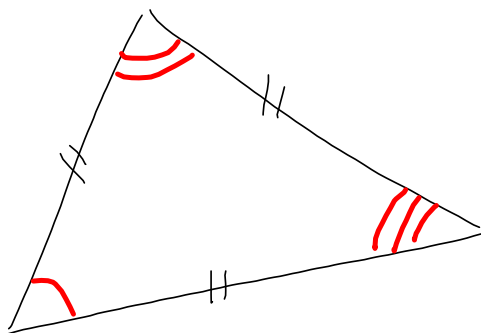
Notation: $[BAC] \in \angle BAC \quad \alpha \quad \angle BAC = \angle \alpha$



Remarques

- 1 Si l'on doit distinguer $[BAC]^s \in \angle BAC$ et $[BAC]^r \in \angle BAC$, on dira l'angle saillant $\angle BAC$ respectivement l'angle rentrant $\angle BAC$.
- 2 La classe $\{ \underline{[A,B]}, \underline{[C,D]}, \dots \} = \angle \omega$ s'appelle **angle nul**.
- 3 La classe $\{ \underline{IP_{1A}}, \underline{IP_{2D}}, \underline{IP_{1B}}, \dots \} = \angle p$ s'appelle **angle plat**.
- 4 La classe $\{ \underline{P_{[A,B]}}, \underline{P_{[C,D]}}, \dots \} = \angle t$ s'appelle **angle tour**.

Sois un triangle équilatéral *Combien
vois-tu d'angles?*



~~3~~ 1 angle

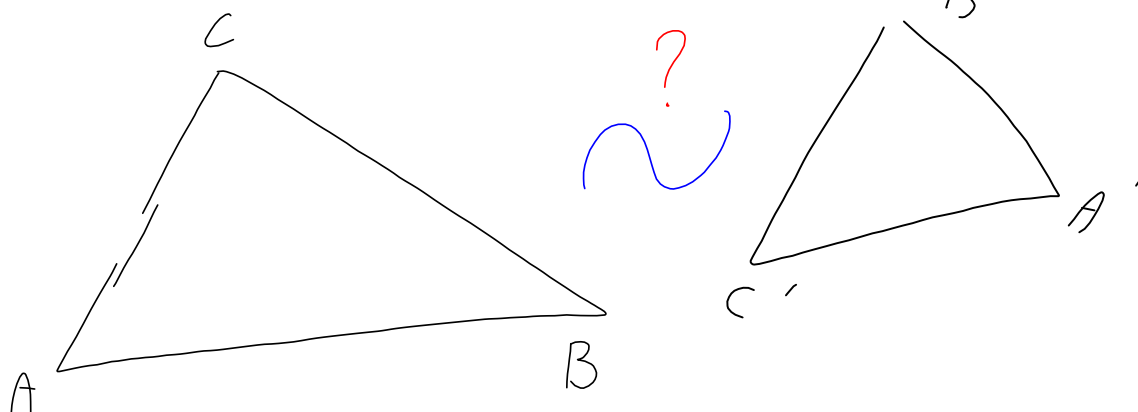
mais 3 secteurs!

* Le théorème 23:

* Notation: F_1 et F_2 sont figures semblables

$$\Leftrightarrow F_1 \sim F_2$$

* Soit 2 triangles quelconque:



THEOREME 23 (1) Deux triangles qui ont deux secteurs respectivement isométriques sont
 AAA semblables. angles égaux

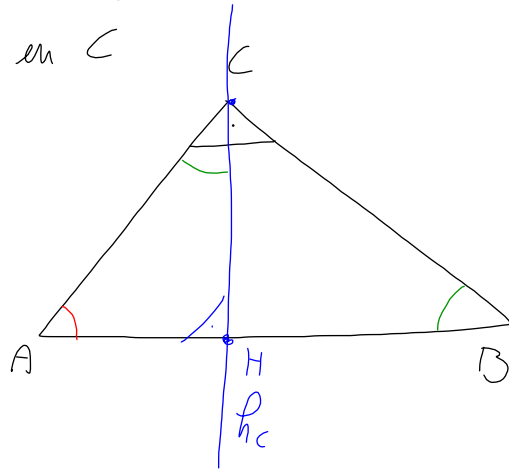
(2) Deux triangles qui ont un secteur isométrique dont les frontières portent des côtés de longueurs
 CAC semblables. angle égal respectivement proportionnelles sont semblables.

(3) Deux triangles qui ont leurs trois côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont
 CCC semblables.

* Applications du thm 23

Théorème : Soit un triangle $\triangle ABC$
rectangle en C

(H) et la hauteur h_c
issue du sommet C
et $H \in h_c \cap (AB)$



(T) Alas

les triangles $\triangle ABC$
et $\triangle AHC$ et $\triangle CHB$ sont semblables

(D) Soit à démontrer : $\triangle ABC \sim \triangle AHC$

avec l'un des critères du thm 23 :

AAA : ces 2 triangles ont deux angles égaux :

$$1) \angle BCA = \angle AHC \quad \text{par (H)}$$

$$(2) \angle CAB = \angle CAH \quad \text{par (H)} \quad \text{par (H)}$$

$$2) \angle ABC = \angle HCA \quad \text{car } (AB) \perp (HC)$$

$$(BC) \perp (AC)$$

par (H)

* de même :

$$\triangle ABC \sim \triangle HBC \dots$$

$$\text{et donc } \triangle AHC \sim \triangle HBC$$

car la relation " $\sim$ " est une
relation d'équivalence.

q.e.d.

AXIOME DE LA MESURE DES ANGLES (pour l'usage du rapporteur)

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles.

On admet que l'on dispose d'une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 360]$

$$\angle \alpha \mapsto \mu(\angle \alpha) = x$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1 $\mu(\angle \alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \angle \alpha = \angle \omega$
- 2 $\mu(\angle p) = 180$
- 3 $\mu(\angle AOB) = \mu(\angle AOC) + \mu(\angle COB) \Leftrightarrow [AOC] \text{ et } [COB] \text{ sont adjacents}$
- 4 μ est bijective.