70 *Démontrer si* $A \neq B$, *que* $\{M \in \mathbb{P} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} \text{ et } \alpha \geq 0\} = [A,B)$.

71 *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $A(-1; 2)$ *et* $B(3; 1)$. *Commet choisir* x *et* y *si* $M(x, y) \in (AB)$?

72 *On donne* $F = \{M(x, y) \in \mathbb{P} \mid y = 4x - 1\}$ *avec* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan. Les points* $O(0; 0)$, $B(\frac{1}{4}; 0)$, $C(1; 3)$, $D(2; 6)$, $E(\frac{8}{5}; \frac{3}{5})$ *sont-ils éléments de* F ?

6 Homothétie et similitude

La géométrie étudie les transformations des figures en recherchant les propriétés conservées, les points invariants.

Exercice 73

Citer des propriétés conservées par la rotation, la translation, la symétrie centrale, l'isométrie. Toutes les transformations dans le plan conservent-elles la distance?
Comment définir une transformation dans le plan? Proposer une définition d'une "dilatation", d'une "contraction".

Définition 18 On appelle **homothétie** de centre A et de rapport r $(r \neq 0)$ l'application

$$\mathcal{H}_{(A,r)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$$

$$M \mapsto M' = \mathcal{H}_{(A,r)}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM'} = r \cdot \overrightarrow{AM}$$

Exercice 74

Soit $\mathcal{H}_{(0,2)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *et* $\mathcal{H}_{(0,2)}(M) = M'$. *Si* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est un repère du plan, dessiner l'image des points suivants,* $A(3; 1)$, $B(-2; -\frac{2}{3})$, O, $C(3; 3)$, $D(-1; \frac{5}{3})$, $E(6; 4)$. *Comment sont transformés ces points par* $\mathcal{H}_{(0,\frac{1}{2})}$?

THEOREME 18 Une homothétie est une bijection.

***Exercice** 75*

Avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan,* A(- 1; 2) , B(3, 1) , C(- 8; 2) , D(1; 1) , *dessiner* B' *et* B'' *si* B' = $\mathcal{H}_{(0,\frac{1}{4})}$(B) *et* B'' = $\mathcal{H}_{(0,4)}$(B') . *Même question avec* C' et C'', A' *et* A'', D' et D'', O' et O''.

THEOREME 19 Le composé de deux homothéties de même centre A et de rapports respectifs r_1 et r_2 est l'homothétie de centre A et de rapport $r_1 \cdot r_2$.

THEOREME 20 L'homothétie de rapport 1 est l'identité.

Le seul point fixe d'une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

THEOREME 21 Par une homothétie $\mathcal{H}_{(A,r)}$:

1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par le facteur constant $|r|$;
3. le centre, un point et son image sont sur une droite;
4. une droite passant par le centre est globalement invariante;
5. toute droite a pour image une droite parallèle;
6. l'image d'une demi-droite est une demi-droite;
7. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
8. les mesures des angles sont conservées.

Exercices

76 Qu'est-ce que $\mathcal{H}_{(A,-1)}$? *Comment choisir* r *si* $\mathcal{H}_{(A,r)}$ *est une isométrie?*

77 On donne deux carrés ABCD *et* EFGH *quelconques dans le plan. Déterminer une homothétie par laquelle l'image de* ABCD *est inscrite dans le carré* EFGH.

78 Soit $a \cap b = \{S\}$ *et* $P \notin a \cup b$. *Construire un cercle passant par* P *tangent à* a *et* b. *(Utiliser une homothétie de centre* S)

79 Si une figure admet un centre de symétrie, son image par une homothétie également.

80 Par une homothétie, l'image d'un rectangle est un rectangle.

81 Les projetés orthogonaux des sommets d'un rectangle sur les diagonales auxquelles ils n'appartiennent pas sont les sommets d'un rectangle homothétique au premier.

82 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux segments soient homothétiques. Peut-on donner un critère d'homothétie pour deux rectangles? deux triangles?

Définition 19 Si $\mathcal{H}_{(A,r)}$ est une homothétie et f une isométrie, alors on appelle **similitudes** les composés $f \circ \mathcal{H}_{(A,r)}$ et $\mathcal{H}_{(A,r)} \circ f$.

Deux figures sont dites **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une similitude.

THEOREME 22 Dans une similitude:

1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par un facteur constant appelé rapport de similitude;
3. toute droite a pour image une droite;
4. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
5. les mesures des angles sont conservées.

Pour démontrer que deux figures sont semblables, il suffit de trouver une homothétie qui applique la première figure sur une figure isométrique à la seconde. Dans le cas des triangles, on peut abréger la recherche des similitudes par l'emploi des critères suivants.

THEOREME 23 Deux triangles qui ont deux secteurs respectivement isométriques sont semblables.

Deux triangles qui ont un secteur isométrique dont les frontières portent des côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

Deux triangles qui ont leurs trois côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

Exercices

83 *Si l'on donne deux segments, existe-t-il une similitude transformant l'un en l'autre? Dans quel cas?*

84 *Démontrer que:*

a) deux triangles rectangles qui ont un secteur aigu isométrique sont semblables;

b) deux triangles isocèles qui ont un secteur de la base isométrique ou le secteur du sommet isométrique sont semblables;

c) tous les triangles équilatéraux sont semblables.

85 *On donne un cercle de diamètre* $[A,B]$ *et la tangente* t *en* B. *Démontrer que pour toute droite* d *passant par* A *qui recoupe le cercle en* R *et coupe* t *en* S, *on a* $\delta(A,R) \cdot \delta(A,S) = \delta(A,B)^2$.

86 *Dans le triangle* ABC, $(AB) \perp (BC)$ *et* $E \in [A,B]$, $F \in [B,C]$, $\{D, G\} \subset [A,C]$. *Si* $DEFG$ *est un carré, son côté est moyenne proportionnelle des deux segments restant sur l'hypoténuse.*

87 *La bissectrice du secteur de sommet* A *d'un triangle* ABC *coupe le côté* $[B,C]$ *en* D *et le cercle circonscrit du triangle* ABC *en* E.
Montrer que $\delta(E,A) \cdot \delta(E,D) = \delta(E,B)^2$ *et* $\delta(E,A) \cdot \delta(E,D) = \delta(E,C)^2$.
En déduire que $\delta(E,B) = \delta(E,C)$.

88 *Théorème de la bissectrice.*
Soit $A \notin (BC)$, $\mathcal{S}_d([B,A)) = [B,C)$ et $d \cap [A,C] = \{D\}$. *Démontrer que* $\dfrac{\delta(B,A)}{\delta(B,C)} = \dfrac{\delta(D,A)}{\delta(D,C)}$
(Construire $(AE) \parallel (BC)$ *et* $E \in d$).

89 *On donne* M *le milieu du côté* $[B,C]$ *d'un triangle* ABC *et les bissectrices des secteurs* $[AMB]$ *et* $[AMC]$ *qui coupent* (AB) *et* (AC) *respectivement en* D *et* E. *Montrer que* $\dfrac{\delta(D,A)}{\delta(D,B)} = \dfrac{\delta(E,A)}{\delta(E,C)}$ *et que* (DE) *est parallèle à* (BC).

90 *Un mât est planté sur la place du village. Un gros boulon y est fixé à 2 m du sol. L'ombre du mât mesure 4.75 m et l'ombre du boulon se situe à 0.80 m du pied du mât. Quelle est la hauteru du mât ?*

91 *Une première sécante coupe 3 parallèles en* A, B *et* C. *Une deuxième sécante coupe les mêmes parallèles respectivement en* D, E *et* F. *On donne* $\delta(A,B) = 6$, $\delta(D,E) = 12$, $\delta(E,F) = 15$, $\delta(A,D) = 9$, $\delta(B,E) = 13$, *calculer* $\delta(G,F)$.

92 *Dans un trapèze* ABCD, $(AB) \parallel (CD)$, $\delta(A,B) = 9$, $\delta(C,D) = 6$ *et* $\delta(A,C) = 10$. O *est le point de l'intersection des diagonales. Calculer* $\delta(O,A)$.

93 *On donne deux points* D *et* E *sur le côté* [A,B) *d'un secteur* [BAC]. *Par* D *et* E, *passent deux parallèles coupant* (AC) *respectivement en* F *et* G. *Par* G, *une parallèle à* (FE) *coupe* (AB) *en* H. *Démontrer que* $\delta(A,E)^2 = \delta(A,D)\cdot\delta(A,H)$.

94 *Dans un parallélogramme* ABCD, *un parallèle à* (AC) *coupe* [A,B] *et* [B,C] *respectivement en* E *et* F. *Par* E *et* F *passent deux parallèles à* (BD) *qui coupent* [A,D] *et* [C,D] *respectivement en* H *et* G. *Démontrer que* $\delta(A,H)\cdot\delta(C,D) = \delta(A,D)\cdot\delta(C,G)$.