UNE HISTOIRE DE LAPINS

Considérons un couple de lapins nouveaux-nés, un mâle et une femelle.

Les lapins sont capables de se reproduire dès l'âge d'un mois et la gestation dure un mois également.

Nous supposerons que la femelle donne à chaque fois naissance à un mâle et à une femelle.

À la fin du premier mois, nous avons toujours **1** seule paire de lapins.

À la fin du second mois, la femelle donne naissance à un mâle et une femelle et nous avons donc maintenant **2** couples.

À la fin du troisième mois la première femelle donne naissance à un nouveau couple, mais la seconde paire ne produit rien; il y a **3** couples au total.

À la fin du quatrième mois, la première et la seconde femelle engendrent chacune un couple; on a maintenant **5** couples.

Et ainsi de suite...

La question est:

combien avons-nous de couples après **n** mois?

La réponse est donnée par la suite

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Ce problème a été posé et résolu par un mathématicien de Pise qui vivait au douzième siècle, **Leonardo Fibonacci**.

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Comment trouve-t'on les nombres de cette suite, appelée **suite de Fibonacci** ?

Appelons $\mathbf{u_n}$ le nombre de couples de lapins que nous avons au mois $\mathbf{n}$.

Au début, nous n'avons aucun lapin et nous dirons que $\mathbf{u_0 = 0}$.

Le premier mois, nous commençons avec un couple. Donc, au mois $\mathbf{1}$, $\mathbf{u_1 = 1}$.

Puisque les lapins ne deviennent adultes qu'à l'âge d'un mois, au mois $\mathbf{2}$ nous avons pas de lapins supplémentaire et donc $\mathbf{u_2 = 1}$.

À la fin du mois $\mathbf{3}$, le couple de lapins donne naissance à un nouveau couple et donc $\mathbf{u_3 = 2}$.

Et ainsi de suite...

Le raisonnement général est le suivant

$\mathbf{u_{n+1}}$ = nombre de couples au mois $\mathbf{n}$ + nombre de couples nés au mois $\mathbf{n+1}$

= nombre de couples au mois $\mathbf{n}$ + nombre de couples adultes au mois $\mathbf{n}$

= nombre de couples au mois $\mathbf{n}$ + nombre de couples nés au mois $\mathbf{n-1}$.

C'est-à-dire

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + u_{n-1}} \quad \text{pour} \quad \mathbf{n = 1, 2, \ldots}$$

Avec cette formule, on retrouve les premiers nombres de la suite de Fibonacci donnés auparavant.

$$\mathbf{u_0 = 0}$$
$$\mathbf{u_1 = 1}$$
$$\mathbf{u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1}$$
$$\mathbf{u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2}$$
$$\mathbf{u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3}$$
$$\mathbf{u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5}$$
$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + u_{n-1}} \quad \text{pour} \quad \mathbf{n = 1, 2, \ldots}$$

En mathématique, une telle formule s'appelle une **relation de récurrence**.

Vous pouvez vous amuser à calculer les nombres de Fibonacci suivants mais, attention, $\mathbf{u_{2000}}$ est un nombre de 400 chiffres et $\mathbf{u_{20000}}$ en comporte 10 fois plus !

Une histoire d'abeilles

Chez les abeilles, il y a des mâles et des femelles.

Parmi les femelles, une seule, la reine, peut produire des œufs. Elle a deux parents, un mâle et une femelle.

Les mâles, appelés faux-bourdons, naissent d'œufs non fécondés et n'ont donc qu'un seul parent, une femelle.

La question est:

Quel est l'arbre généalogique des faux-bourdons?

Un faux-bourdon a **1** seul parent, une femelle.

Il a **2** grands-parents puisque sa mère avait deux parents, un mâle et une femelle.

Il a **3** arrière-grands-parents, 2 femelles et un mâle, car sa grand-mère avait 2 parents mais son grand-père un seul.

En continuant, on obtient la suite des ancêtres de notre faux bourdon

Génération	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
Femelles	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$
Mâles	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
Total	1	1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$

Ces trois suites sont des **suites de Fibonacci**. Elles peuvent être obtenues par la relation de récurrence précédente, la première en prenant $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, la seconde avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$ et la troisième à partir de $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Une histoire de coquillages

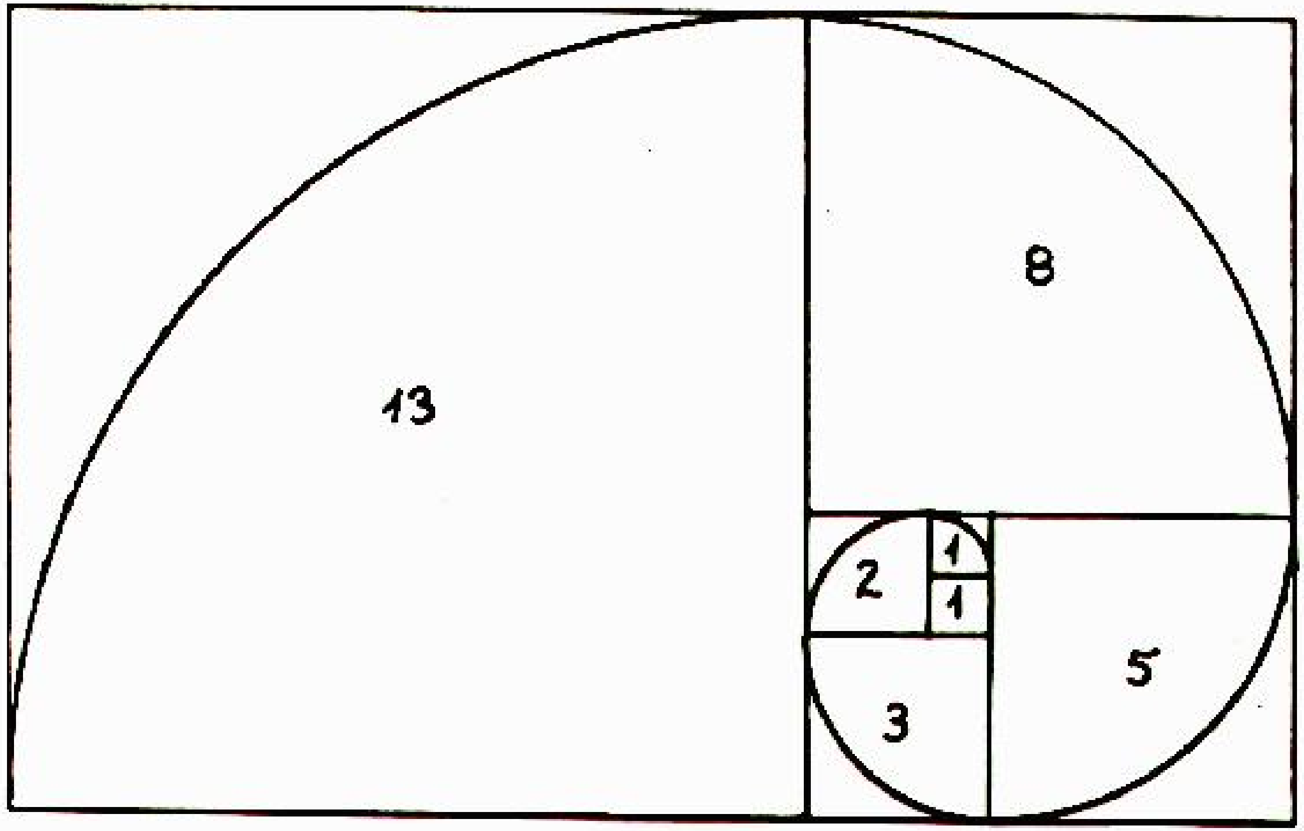
Dessinons, l'un à côté de l'autre, deux carrés adjacents de côté 1.

Au dessus d'eux, plaçons un carré de côté $1 + 1 = 2$.

À droite, mettons un carré de côté $1 + 2 = 3$, puis en dessous un autre de côté $2 + 3 = 5$, à gauche un autre de côté $3 + 5 = 8$, au nord un nouveau de côté $5 + 8 = 13$ et ainsi de suite en tournant dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

On peut maintenant dessiner une spirale en joignant des quarts de cercle, un par carré; c'est la **spirale de Fibonacci**.

Spirale de Fibonacci



Nous en trouvons des exemples dans la nature.

Coquille d'escargot ou de **nautile**.

Pomme de pin.

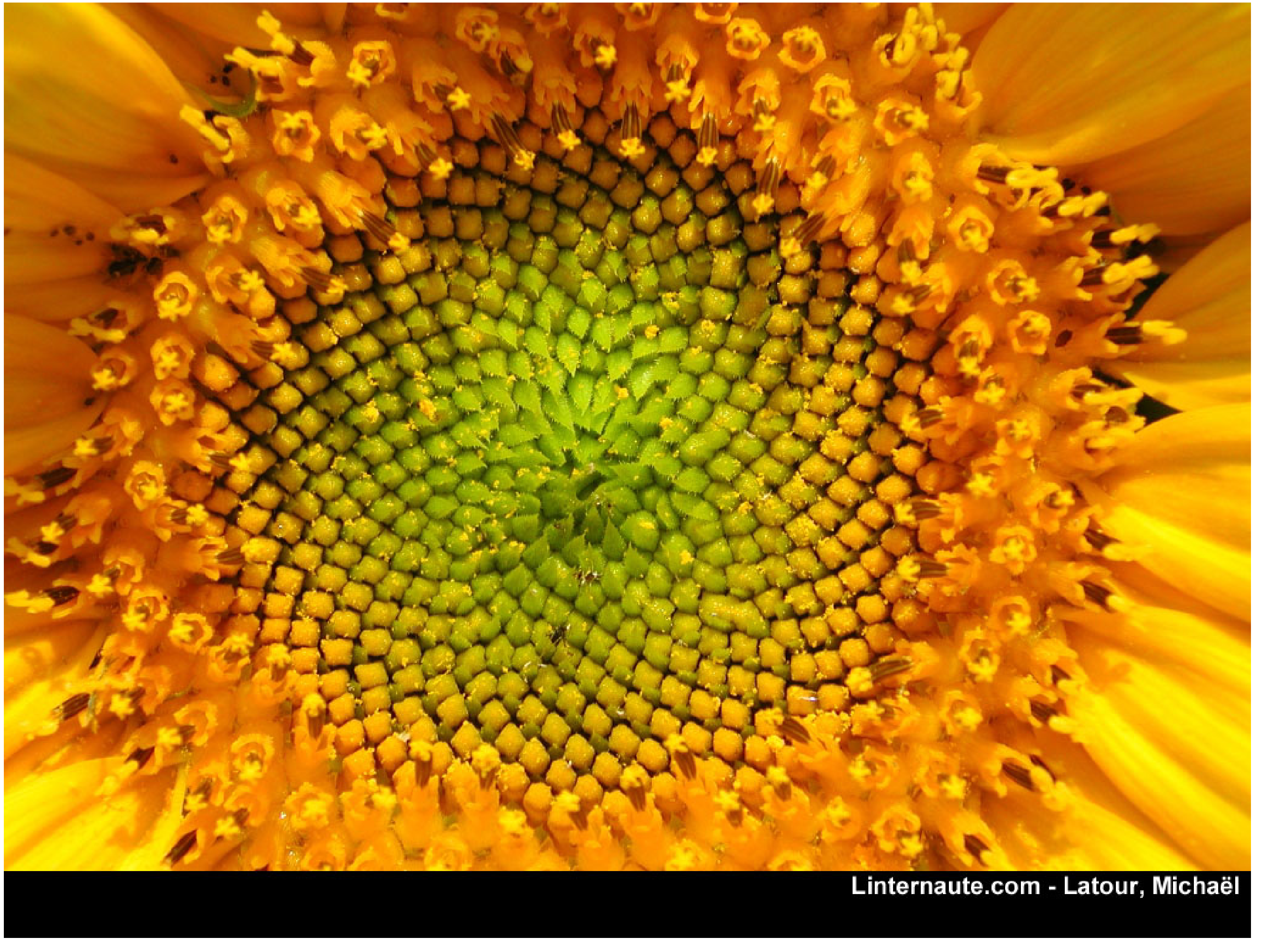
Fleur de **tournesol**.

Nous pouvons voir des multitudes de telles spirales entrelacées.

Elles sont dues à l'arrangement optimal des pistils.

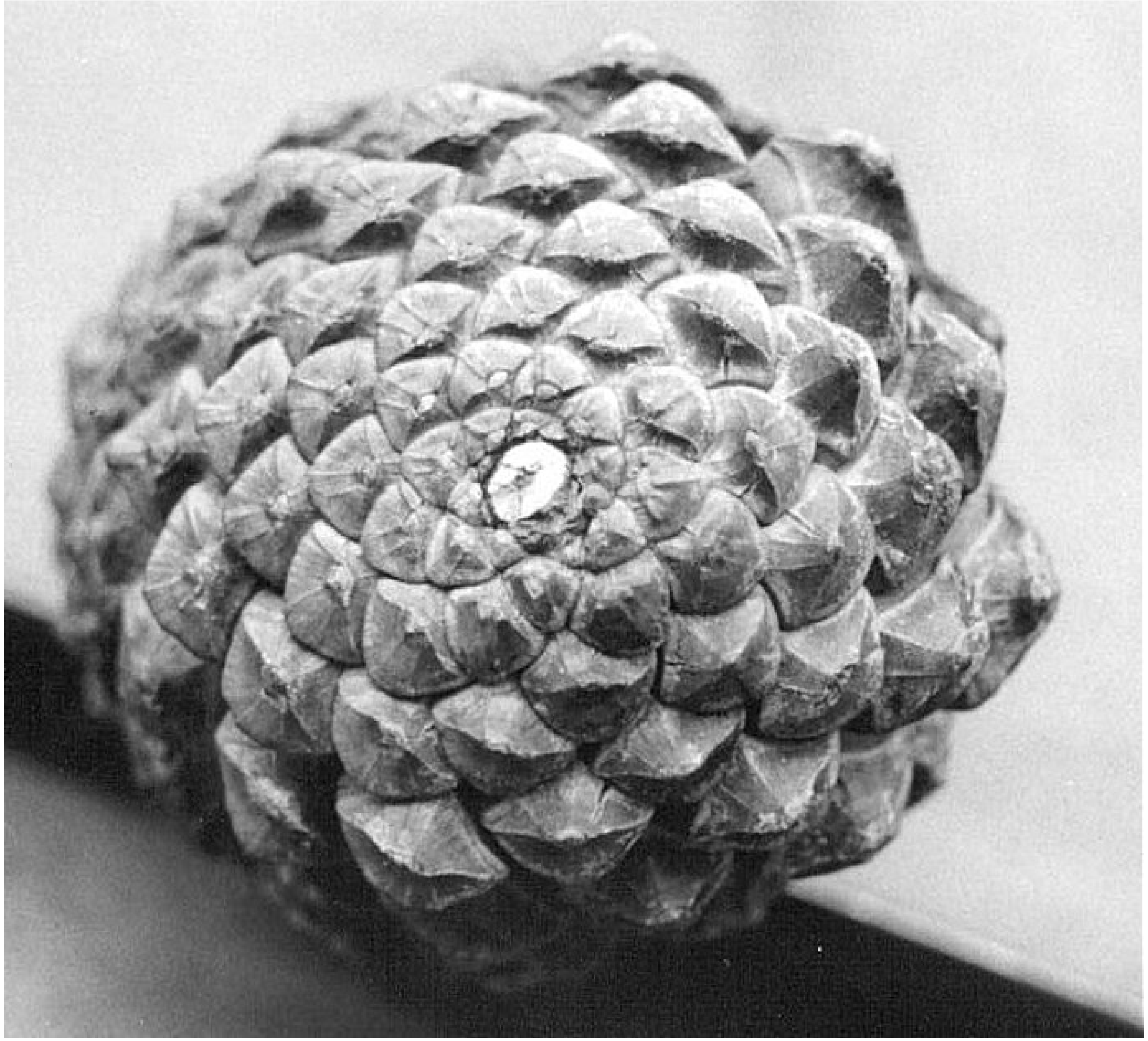
Quelle que soit leur taille, ils sont placés uniformément, ni trop serrés vers le centre ni trop écartés au bord.

Tournesol



Nautile

Pomme de pin



La phyllotaxie

La **phyllotaxie** étudie la répartition des feuilles sur les tiges d'une plante.

Faisons passer une hélice par l'extrémité de chaque feuille en commençant par le bas de la tige.

Soit p le nombre de tours de l'hélice et q le nombre de feuilles qu'elle rencontre (la première mise à part).

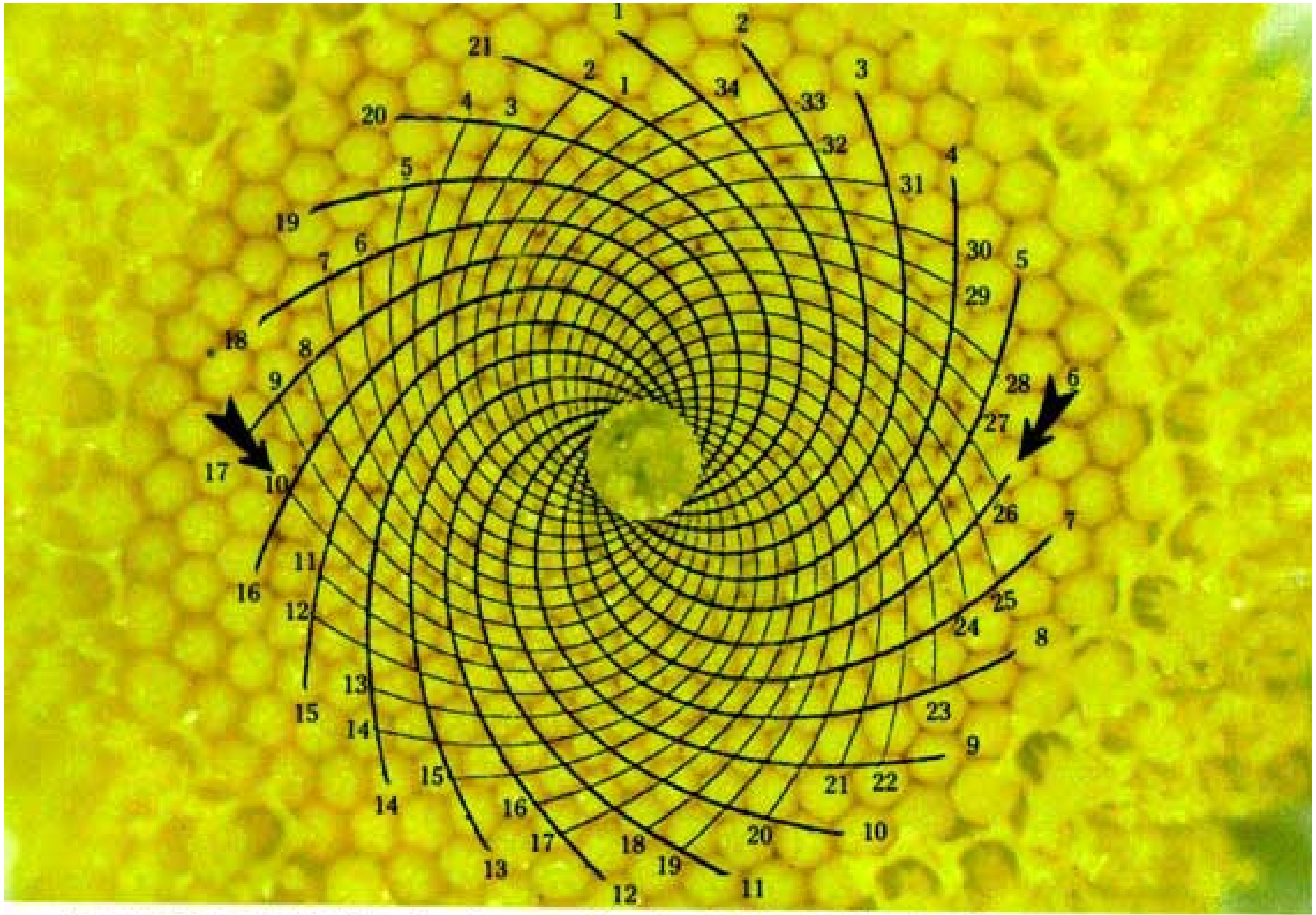
La suite des fractions p/q est caractéristique de l'espèce.

Dans certaines espèces cette suite est

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \ldots$$

On voit que les numérateurs et les dénominateurs sont des **suites de Fibonacci** .

Le cœur d'une marguerite



Le cœur de la marguerite présente un système de spirales imbriquées : 21 spirales tournent dans le sens négatif et 34 dans le sens positif.

Les réflexions multiples

Accolons deux lamelles de verre.

Un rayon de lumière qui les frappe subit des réflexions multiples avant de ressortir.

Il peut passer directement et ne subir aucune réflexion.

Il peut subir une seule réflexion, soit sur la première lamelle soit sur la seconde.

Il peut subir 2 réflexions, de 3 façons différentes.

S'il subit trois réflexions, il y a 5 possibilités.

Pour 4 réflexions, il existe 8 trajets possibles.

Nous voyons donc qu'il y a $\mathbf{u_n}$ trajets possibles comportant $\mathbf{n}$ réflexions, avec $\mathbf{u_0 = 1}$ et $\mathbf{u_1 = 2}$.

Encore la suite de Fibonacci!

L'atome d'hydrogène

Considérons un atome d'hydrogène avec son seul électron initialement au repos.

Au cours du temps, il gagne ou perd alternativement un ou deux quanta d'énergie.

Il monte ou descend donc d'un ou de deux niveaux d'énergie à chaque étape.

Naturellement, il ne peut pas descendre en dessous du niveau de repos.

On demande quelle est le nombre d'histoires possibles de l'électron après n étapes.

La réponse est facile à trouver la réponse: le nombre de Fibonacci u_n bien sûr!

Un peu de mathématiques

Essayons de construire une suite de Fibonacci en partant de deux nombres quelconques. Prenons, par exemple, $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$.

Avec notre **récurrence**, on obtient
$4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \ldots$

Calculons maintenant le rapport d'un nombre avec celui qui le précède. On trouve

n	u_{n+1}/u_n		valeur
0	$3/1$	$=$	3
1	$4/3$	$=$	$1.333\ldots$
2	$7/4$	$=$	$1.750\ldots$
3	$11/7$	$=$	$1.571\ldots$
4	$18/11$	$=$	$1.6363\ldots$
7	$76/47$	$=$	$1.6170\ldots$
10	$322/199$	$=$	$1.61809\ldots$
14	$2207/1364$	$=$	$1.618035\ldots$

On voit que ces rapports se rapprochent de plus en plus de

$$\mathbf{(1+\sqrt{5})/2 = 1.618033988\ldots}$$

C'est le fameux

nombre d'or.

Ce nombre d'or s'appelle aussi la **divine proportion** pour reprendre le titre du célèbre ouvrage de **Luca Pacioli** (Borgo San Sepolcro, ca. 1445 - Rome, 1514) qui lui est consacré et a été illustré par **Léonard de Vinci**.

Nous aurions trouvé une suite de rapports ayant la même limite si nous étions parti d'autres valeurs de u_0 et u_1.

Ce nombre a vraiment fait couler beaucoup d'encre. On lui a attribué des qualités esthétiques dans l'art (architecture, peinture, musique), certains en ont donné des interprétations mystiques et on le retrouve dans de nombreux problèmes mathématiques. Il a fasciné et fascine encore.